




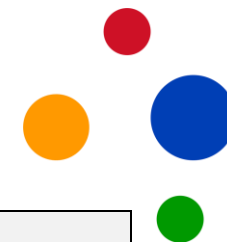
## MERIA scenarij "Zavorna pot"

### Kvadratna odvisnost

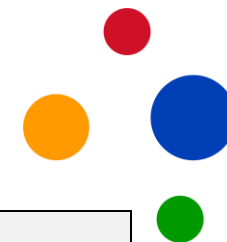
Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Zavorna pot je kvadratno odvisna od začetne hitrosti.
Splošni cilji	Kvadratne funkcije in njihov opis s konstantnim drugim odvodom (drugimi diferencami za kvadratno zaporedje) ali s konstantno padajočim ali naraščajočim prvim odvodom (diferencami za kvadratna zaporedja). Računanje z različnimi merskimi enotami. Organiziranje podatkov. Oblikovanje funkcijske zveze (zapis formule za funkcijsko pravilo). Risanje grafov (kvadratnih) funkcij brez ali z uporabo računalnika. Preiskovalne veščine: analiziranje podatkov in iskanje vzorcev v tabelah. Utemeljitev (argumentacija) svojih dognanj pri predstavitvi (izračuni prevladujejo med samim procesom in dijaki morajo ostalim povzeti svoj pristop). Interdisciplinarne veščine: dijaki morajo delati s fizikalnimi količinami in razumeti, kaj se dogaja (premostitev med različnimi oznakami in postopki). Pri pisanju poročila so poudarjene komunikacijske spretnosti. Dijaki razpravljajo tudi o odgovornosti voznikov in varnosti v prometu.
Potrebno matematično predznanje	Osnovno znanje funkcij, zveza med konstantno hitrostjo in razdaljo, povprečna hitrost, pretvorba iz km/h v m/s (in obratno)
Letnik	Dijaki, stari 15-16 let (oziroma kadar se uvede kvadratna funkcija)
Trajanje	90 minut, dve šolski uri
Potrebni material	Izročki s preglednicami, ki jih je potrebno izpolniti, računalno, računalnik, milimetrski papir
<b>Opazanja med učnim procesom</b>	
Kontekst opazovanja (razred, šola, država itd.):	
<p><b>Problem:</b> Starši izražajo zaskrbljenost glede hitrostnih omejitev v okolici šol. Skupina neodgovornih voznikov na drugi strani pojasnjuje, da je skrb odveč, saj bodo pravočasno zavrli. Raziščite, kako je zavorna pot odvisna od hitrosti tik pred začetkom zaviranja. Obvestite župana o posledicah spreminjanja najvišje hitrosti. Svoja priporočila podprite z reprezentacijami kot recimo tabelami in grafi. Privzemimo, da hitrost avtomobila ob zaviranju pade za 10 km/h vsake 0,4 sekunde.</p> <p>Za beleženje opažanj in izračunov lahko uporabite preglednico, nato pa čim bolj utemeljite svoj odgovor.</p>	
	



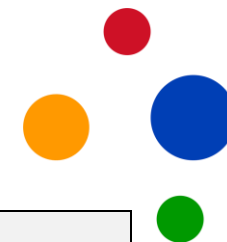
Faza	Dejavnosti in navodila učitelja	Dejavnosti in odzivi dijakov	Opažanja med izvedbo
<p>Devolucija (Prenos) (didaktična)</p> <p>10 minut</p>	<p>Učitelj razdeli dijaki v skupine po 3 ali 4.</p> <p>Učitelj predstavi problem in zagotovi, da dijaki razumejo predpostavko o konstantno padajoči hitrosti med zaviranjem. Predebatira o ideji majhnih časovnih intervalov kjer se lahko gibanje aproksimira z gibanjem s konstantno (povprečno) hitrostjo.</p> <p>Učitelj preveri razumevanje izrazov v tabeli, osnovno zvezo med hitrostjo, časom in razdaljo, kako pretvorimo km/h v m/s in idejo, da lahko dano hitrost 40 km/h nadomestimo z drugačnimi vrednostmi.</p> <p>Učitelj pojasni, da imajo dijaki svobodno izbiro pri uporabi strategij. Uporabljajo lahko kakršno koli tehnologijo.</p> <p>Učitelj razdeli izročke z nalogo. Dijaki pripravijo kalkulatorje (če nimajo svojih, jim jih priskrbi učitelj), računalnik in milimetrski papir.</p> <p>Učitelj pove, da imajo na voljo 20 minut, da raziščejo, kako se spreminjata hitrost in razdalja in da pridejo do nekih zaključkov o tem, kakšna je povezava med njima.</p>	<p>Dijaki poslušajo, se pogovarjajo o svojih idejah oblikujejo odgovore na vprašanja.</p>	



<p>Reševanje (Delovanje) (adidaktična)</p> <p>20 minut</p>	<p>Učitelj hodi po razredu in opazuje delo dijakov brez vmešavanja s predlogi ali vprašanji.</p> <p>V primeru, da več skupin začne novo tabelo za vsako novo začetno hitrost, učitelj načne kratko skupinsko predstavitev, kako so se posamezne skupine spopadale s to težavo. Verjetno vsaj ena od skupin ugotovi, da lahko uporabijo predhodne izračune pri problemu zavorne poti za druge začetne hitrosti in da lahko iz te tabele preberejo tudi zavorne poti za nižje začetne hitrosti. To se lahko uporabi kot povratna informacija za preostale skupine.</p>	<p>Dijaki v skupinah razpravljajo o strategijah.</p> <p>Izpolnjujejo tabelo – uporabljajo kalkulatorje ali IKT za risanje točk ...</p> <p>Govorijo o natančnosti, preizkušajo primere z drugačno začetno hitrostjo ...</p> <p>Člani skupine lahko uporabijo različne ideje in individualno izpeljejo rešitev.</p> <p>Dijaki lahko uporabljajo izračune, grafe ali fizikalna dejstva pri iskanju zaključkov:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- zavorna pot se ne spreminja konstantno,</li> <li>- povezava med začetno hitrostjo in zavorno potjo ni linearna,</li> <li>- ob povečanju začetne hitrosti se podaljša tudi zavorna pot, toda ne proporcionalno.</li> </ul> <p>Nekateri dijaki bodo morda opazili, da so druge diference (približno) konstantne in za izračun uporabili rekurzivno metodo.</p>	
--	--	---	--

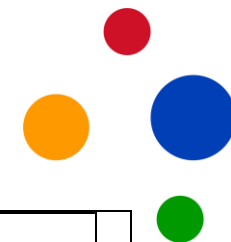


<p>Formulacija (Zapis ugotovitev) (didaktična)</p> <p>10 minut</p>	<p>Učitelj z vsako skupino posebej na kratko razpravlja o njihovih ugotovitvah (dijaki mu jih na kratko predstavijo). Zastavi lahko vprašanja in se pogovori o idejah z dijaki, še posebej, če se je skupini med delom zataknilo.</p> <p>V skupinah, kjer so znotraj skupine delali z različnimi strategijami, naj se dijaki (zaradi pomanjkanja časa) osredotočijo na eno in jo uporabijo pri oblikovanju zaključkov in predstavljanju idej.</p> <p>Učitelj opomni dijake, da je cilj te aktivnosti, da ugotovijo, kako je zavorna pot odvisna od hitrosti tik pred začetkom zaviranja in da so na podlagi tega zmožni dati ustrezno priporočilo.</p> <p>Tako so dijaki pozvani, da pripravijo predstavitev za župana o posledicah spreminjanja najvišje hitrosti in da priporočila podprejo z reprezentacijami kot recimo tabelami in grafi.</p>	<p>Dijaki na kratko predstavijo svoje ideje in postavljajo vprašanja.</p>	
<p>Reševanje (Delovanje) v kombinaciji s Formulacijo (Zapisom ugotovitev) (adidaktična)</p> <p>20 minut</p>	<p>Učitelj opazuje.</p>	<p>Dijaki poskušajo posplošiti svoje izračune in opažanja.</p> <p>Nekateri bodo morda izbrali drugačno strategijo za posploševanje ali pristop k problemu.</p> <p>Dijaki pripravljajo predstavitev in priporočila za župana.</p>	



Verifikacija (Potrditev) (didaktična)  25 minut	Učitelj dijakom naroči, naj predstavijo in primerjajo svoje strategije, in vpraša, zakaj nekatere strategije ne bodo pripeljale do dokaza, da je zveza kvadratna.	Dijaki poslušajo, zastavljajo vprašanja in razpravljajo o ostalih strategijah in rešitvah.	
Institucionalizacija (Oblikovanje ustaljenega zapisa) (didaktična)  5 minut	Učitelj izpostavi matematične podobnosti in razlike med strategijami dijakov, razloži, zakaj nekatere strategije ne pripeljejo do dokaza, čeprav na grafu izgledajo prepričljivo in s pomočjo tehnologije mogoče dobijo formulo, ki opisuje kvadratno zvezo. Učitelj predstavi splošen zapis kvadratne funkcije.	Dijaki poslušajo in povežejo svoje rešitve s splošno kvadratno funkcijo.	

Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja	Dijaki dopolnijo tabelo s podatki ( $v$ , $d$ ).					
	Čas (sekunde)	Sprememba hitrosti med zaviranjem (km/h)	Povprečna hitrost (km/h)	Povprečna hitrost (m/s)	Časovni interval $\Delta t$ (s)	Prevožena razdalja $\Delta d$ (m)
	$t = 0$ do $t = 0,4$	$v = 40$ do $v = 30$	35	$\frac{175}{18}$	0,4	$\frac{35}{9}$
	$t = 0,4$ do $t = 0,8$	$v = 30$ do $v = 20$	25	$\frac{125}{18}$	0,4	$\frac{25}{9}$
	$t = 0,8$ do $t = 1,2$	$v = 20$ do $v = 10$	15	$\frac{25}{6}$	0,4	$\frac{15}{9}$



	$t = 1,2$ do $t = 1,6$	$v = 10$ do $v = 0$	5	$\frac{25}{18}$	0,4	$\frac{5}{9}$
Prevožena razdalja od začetka zaviranja (m)						$\frac{80}{9}$

Hitrost tik pred zaviranjem (km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100	110
Zavorna pot (m)	5	$\frac{80}{9}$	$\frac{125}{9}$	20	$\frac{245}{9}$	$\frac{320}{9}$	45	$\frac{500}{9}$	$\frac{605}{9}$

Ali z decimalnimi števili, na primer

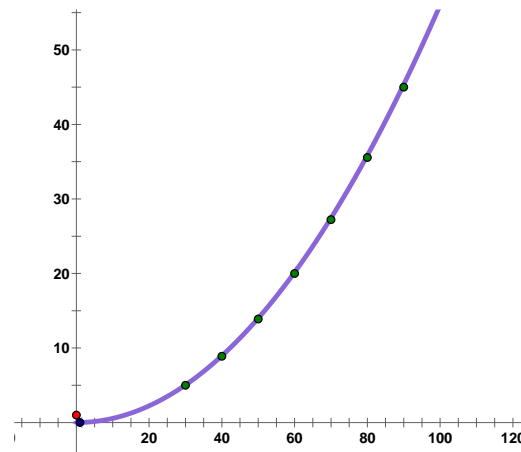
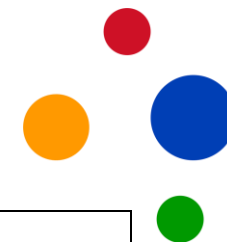
Hitrost tik pred zaviranjem (km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100	110
Zavorna pot (m)	5	8,89	13,89	20	27,22	35,56	45	55,56	67,22

Z analizo podatkov lahko dijaki zaključijo naslednje:

- Zavorna pot je daljša, kadar je hitrost višja.
- Zveza med hitrostjo in zavorno potjo ni linearna (kvocient  $\frac{\Delta d}{\Delta v}$  ni konstanten).
- Če se hitrost podvoji, se zavorna pot podaljša štirikratno. Če se hitrost potroji, se zavorna pot podaljša devetkratno.
- Dijaki lahko narišejo točke  $(v, d)$  in pridejo do zaključka, da je zveza morda kvadratna. Lahko zapišejo kvadratno funkcijo

$$d = av^2 + bv + c$$

in določijo neznane koeficiente  $a, b, c$  z uporabo podatkov iz tabele in z reševanjem sistema linearnih enačb. Na ta način bodo dobili približek. Ta strategija ne bo pripeljala do dokaza, da je zveza kvadratna.



- Po zaključku, da je povezava morda lahko kvadratna, lahko dijaki uporabijo IKT in poiščejo kvadratno regresijo. Dobili bodo približek. Ta strategija ne bo pripeljala do dokaza, da je zveza kvadratna.
- Na podlagi podatkov iz tabele lahko dijaki posplošijo:

$$d_{40} = 5 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0,4 + 15 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0,4 + 25 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0,4 + 35 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0,4$$

$$d_{40} = \frac{5}{9} (1 + 3 + 5 + 7) = \frac{5}{9} \cdot 16 = \frac{80}{9} \approx 8,89$$

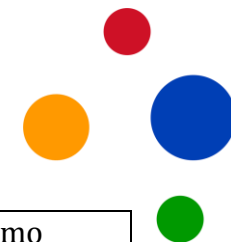
$$d_{50} = d_{40} + 45 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0,4$$

$$d_{50} = \frac{5}{9} (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = \frac{5}{9} \cdot 25 = \frac{125}{9} \approx 13,89$$

$$d_{60} = d_{50} + 55 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0,4$$

$$d_{60} = \frac{5}{9} (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11) = \frac{5}{9} \cdot 36 = 20$$

$$d_{v_0} = \frac{5}{9} (1 + 3 + \dots + (2n - 1)) = \frac{5}{9} \cdot n^2$$



Pomemben zaključek je, da ob opazovanju zavorne poti iščemo trenutek, ko je hitrost enaka 0; torej bomo tolikokrat odšteli 10 od  $v_0$ , da bomo na koncu dobili 0:

$$v_0 - 10n = 0 \Rightarrow n = \frac{v_0}{10}$$

$$d_{v_0} = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 = \frac{1}{180} v_0^2 \approx 0,0056 v_0^2$$

V tej formuli uporabijo hitrost  $v_0$  v km/h in dobijo razdaljo v metrih.

- Dijaki lahko uporabijo računala in izpolnijo tabelo v decimalnih številih. Rezultat ne bo eksakten in ne bo enostavno prepoznati vzorca.
- Dijaki lahko uporabijo podatek, da se hitrost zmanjša za 10 km/h vsake 0,4 sekunde. Izračunajo lahko, da se hitrost zmanjša za 25 km/h vsako sekundo oziroma 6,94 m/s vsako sekundo, kar pomeni, da je pospešek enak  $a = 6,94 \text{ m/s}^2$ . Nato lahko uporabijo fizikalne formule:

$$v = v_0 - at, d = v_0 t - \frac{a}{2} t^2.$$

Uporabijo pomembno dejstvo, da ob opazovanju zavorne poti iščemo trenutek, ko je hitrost enaka 0. Iz prve formule ( $v = 0$ ) izračunajo čas  $t = \frac{v_0}{a}$ , kar vstavijo v drugo, da dobijo

$$d = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{9v_0^2}{125} = \frac{v_0^2}{13,8} = 0,072v_0^2.$$

V tej formuli uporabijo hitrost  $v_0$  v m/s in dobijo razdaljo v metrih.

- Če dijaki izračunajo pospešek v km/h<sup>2</sup>, dobijo  $a = 90000 \text{ km/h}^2$ . Nato uporabijo hitrost  $v_0$  v km/h in dobijo razdaljo v kilometrih

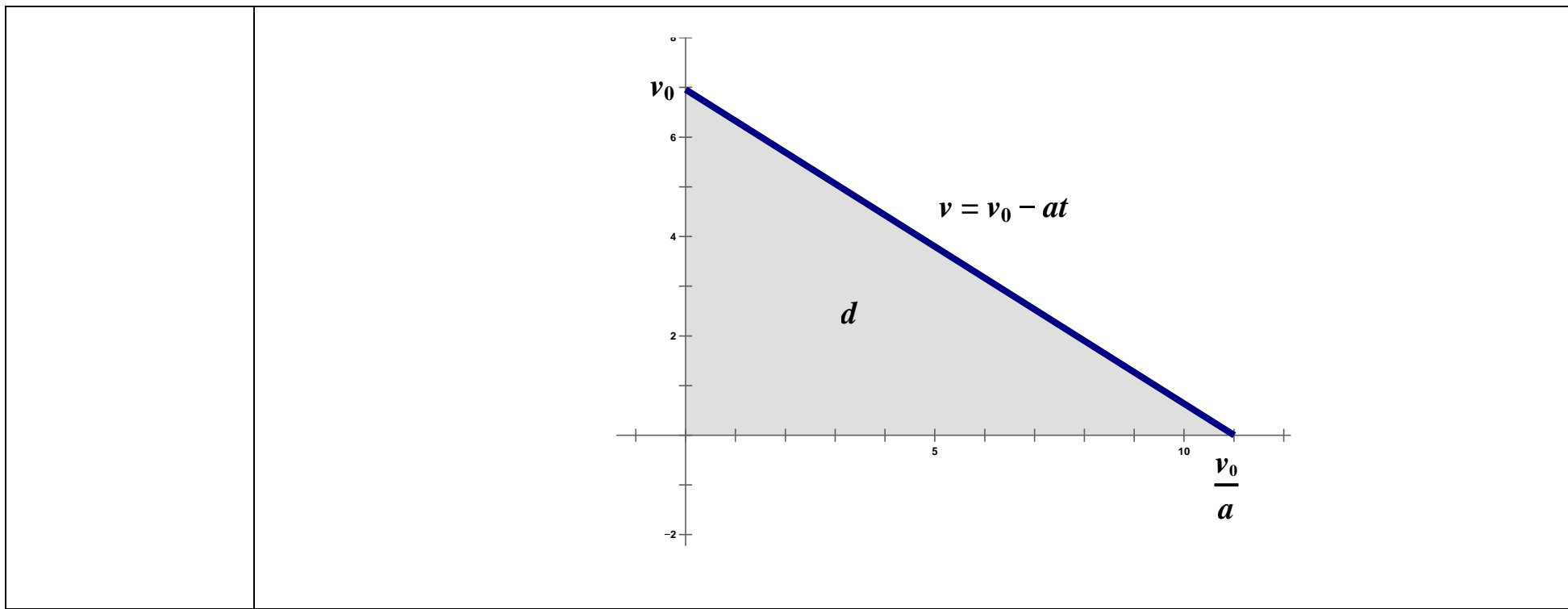
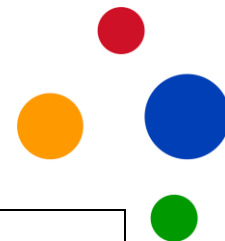
$$d = \frac{v_0^2}{180000}, \text{ oziroma metrih } d = \frac{v_0^2}{180}.$$

- Dijaki lahko narišejo  $v$ - $t$  graf in izračunajo prevoženo razdaljo kot ploščino pod grafom:

$$d = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0}{a} \cdot v_0 = \frac{v_0^2}{2a} = 0,072v_0^2.$$

V tej formuli uporabijo hitrost  $v_0$  v m/s.







	Čas (sekunde)	Sprememba hitrosti med zaviranjem (km/h)	Povprečna hitrost (km/h)	Povprečna hitrost (m/s)	Časovni interval $\Delta t$ (s)	Prevožena razdalja $\Delta d$ (m)
	$t = 0$ do $t = 0,4$	$v = 40$ do $v = 30$	35			
Prevožena razdalja od začetka zaviranja (m)						

Hitrost tik pred zaviranjem (km/h)	40							
Zavorna pot (m)								