

3. konferenca učiteljev naravoslovnih predmetov
Povezujemo znanje za boljšo pismenost & Scientix

Od induktivnega sklepanja do dokaza

Mateja Sirnik
Laško, 21.8.2015



V naših učnih načrtih



- induktivno sklepajo, posplošujejo, posplošitev dokažejo ali ovržejo in dokažejo z matematično indukcijo
- oblikujejo slikovne, številske in geometrijske vzorce
- opazujejo vzorec, prepoznajo pravilo v vzorcu in ga nadaljujejo
- opazujejo vzorce, ugotovijo pravilo in ga zapišejo z algebrskim izrazom
- abstraktno razmišlja
- razume razliko med formalnim matematičnim sklepanjem in intuitivnimi izpeljavami

Induktivno sklepanje -> induktivno dokazovanje



- opazovanje
- iskanje lastnosti in pravila
- ugibanje
- napovedovanje
- preizkušanje
- induktivno sklepanje

dokazovanje s popolno indukcijo

Timss, 2011

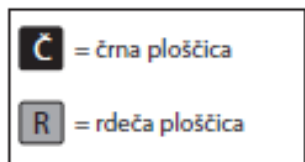


Polona ima rdeče in črne ploščice. Iz njih sestavlja kvadratne like.

Lik 3 x 3 ima 1 črno
in 8 rdečih ploščic.



Lik 4 x 4 ima 4 črne
in 12 rdečih ploščic.



Spodnja tabela prikazuje število ploščic za prve tri like, ki jih je sestavila Polona. Polona je za sestavljanje likov uporabila enak vzorec. Dopolni tabelo za lik 6 x 6 in lik 7 x 7.

Lik	Število črnih ploščic	Število rdečih ploščic	Skupno število ploščic
3 x 3	1	8	9
4 x 4	4	12	16
5 x 5	9	16	25
6 x 6	16		
7 x 7	25		

Rezultati v Sloveniji	Leto	Odstotki pravih odgovorov	Odstotki delno pravih odgovorov
	2007	60,5	8,7
	2011	61,2	6,4

A. Polona je sestavila lik, ki je imel skupaj 64 ploščic. Koliko je bilo črnih in koliko rdečih ploščic?

B. Polona je sestavila nov lik tako, da je uporabila 49 črnih ploščic. Koliko rdečih ploščic je Polona uporabila za ta lik?

C. Nato je Polona sestavila še en lik tako, da je uporabila 44 rdečih ploščic. Koliko črnih ploščic bi Polona potrebovala, da bi dokončala še črni del lika?

Polona bi rada dodala v tabelo vrstico, iz katere bi lahko ugotovila število ploščic za katerikoli lik. S pomočjo podatkov iz tabele na prejšnji strani dopolni vrstico za lik $n \times n$ v spodnji tabeli.

Lik	Število črnih ploščic	Število rdečih ploščic	Skupno število ploščic
$n \times n$	$(n - 2)^2$		

Rezultati v Sloveniji	Leto	Odstotki pravih odgovorov	Odstotki delno pravih odgovorov
	2007	33,9	4,7
	2011	31,9	4,0

Rezultati v Sloveniji	Leto	Odstotki pravih odgovorov
	2007	21,7
	2011	23,6

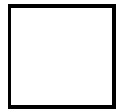
Rezultati v Sloveniji	Leto	pravih odgovorov
	2007	14,1
	2011	13,5

Rezultati v Sloveniji	Leto	Odstotki pravih odgovorov	Odstotki delno pravih odgovorov
	2007	1,5	16,5
	2011	3,5	14,8

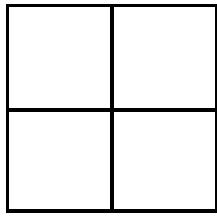




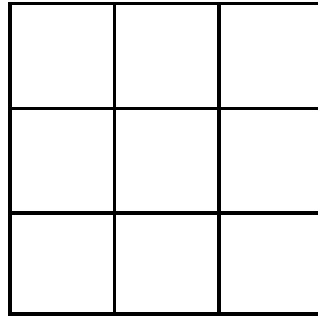
Lik na vsakem mestu je sestavljen iz enotskih kvadratov, kakor prikazuje slika.



Mesto 1



Mesto 2



Mesto 3

- Koliko enotskih kvadratov bi sestavljalo lik na mestu 4? _____
- Koliko enotskih kvadratov bi morali dodati liku na mestu 4, da bi dobili lik na mestu 5?

- Koliko enotskih kvadratov bi vseboval lik na mestu n ? _____
- Koliko enotskih kvadratov bi morali dodati liku na mestu n , da bi dobili lik na mestu $n + 1$?

Reševanje:

Po naših učbenikih (M. Strnad)



Nadaljuj zaporedje oblik in ga **opiši**.

Katera oblika stoji na izbranem mestu?

a) 10. mesto, 41. mesto, splošno n -to mesto



a) 55. mesto, 120. mesto, splošno n -to mesto



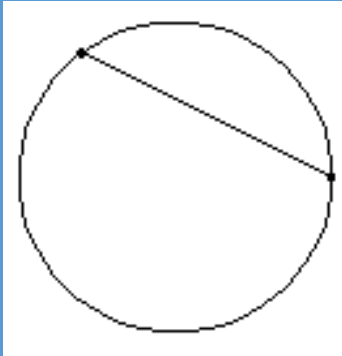
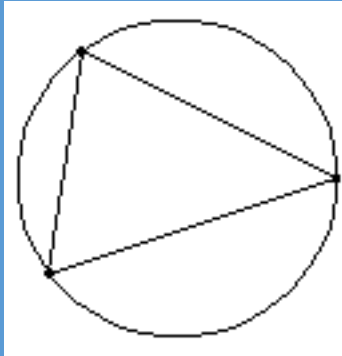
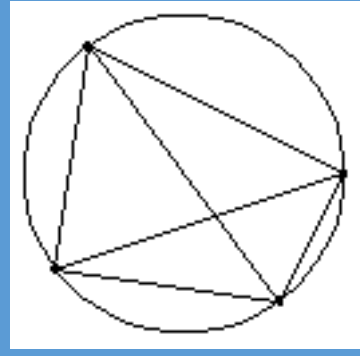
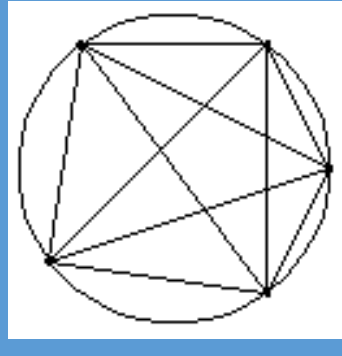
a) 113. mesto, 289. mesto, splošno n -to mesto





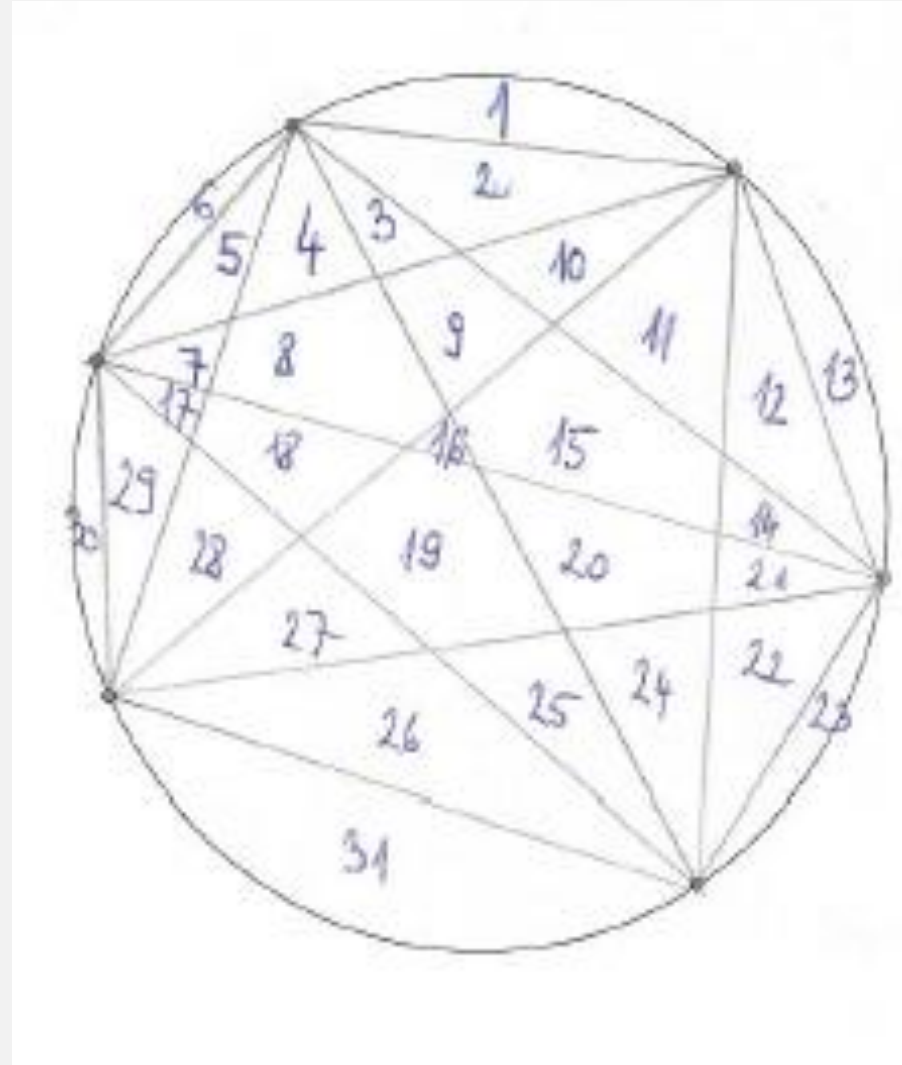
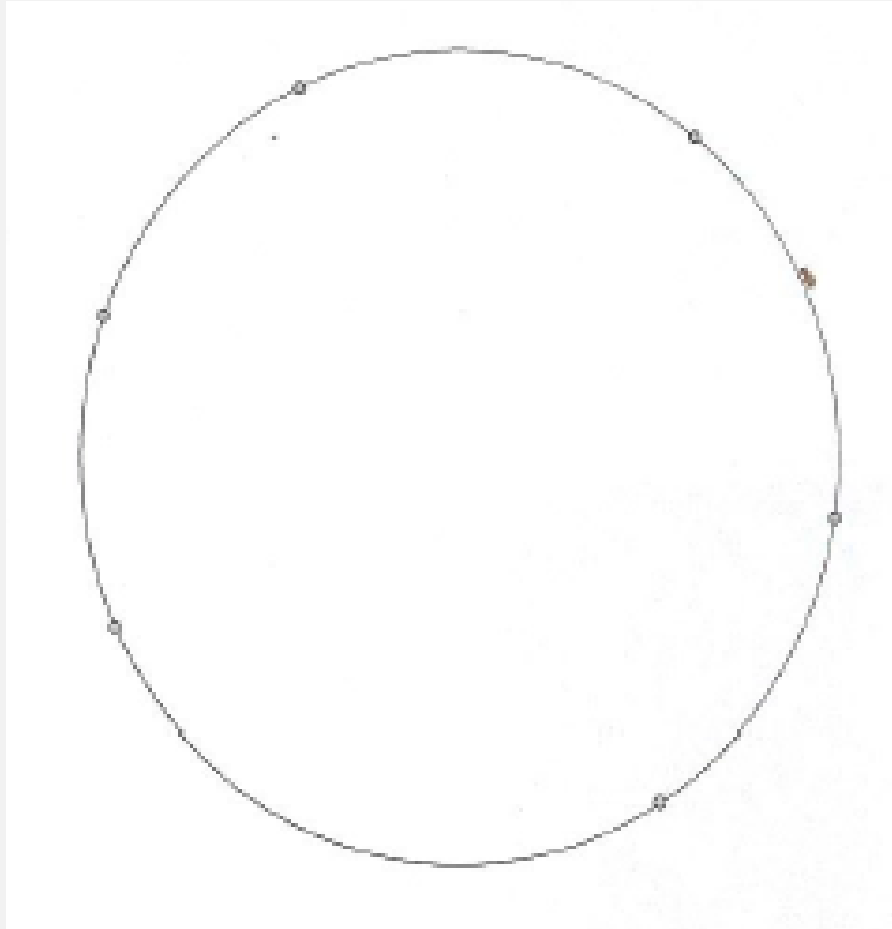
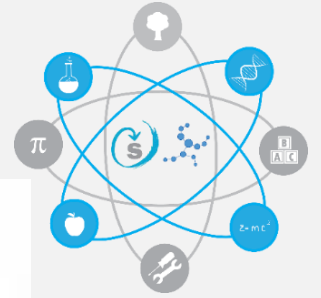
Opazovanje, iskanje pravila, posploševanje...

Na krožnici je n točk. Vsako točko povežemo s preostalimi točkami. Na koliko delov tetive razdelijo krog?

			
2 točki 2 območji	3 točke 4 območja	4 točke 8 območij	5 točk 16 območij

Induktivni sklep: n točk, 2^{n-1} območij

Napačen induktivni sklep



$$\text{Število območij}(n) = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

Primer napačnega sklepanja



lik	Vsota notranjih kotov	Vsota zunanjih kotov
trikotnik	180°	360°
štirikotnik	360°	
petkotnik	540°	
...		
n-kotnik	$(n-2) \cdot 180^\circ$	

Primer napačnega sklepanja



lik	Vsota notranjih kotov	Vsota zunanjih kotov
trikotnik	180°	360°
štirikotnik	360°	$2 \cdot 360^\circ$
petkotnik	540°	$3 \cdot 360^\circ$
...		
n-kotnik	$(n-2) \cdot 180^\circ$	$(n-2) \cdot 360^\circ$



Seštejmo prvih 200 lihih naravnih števil

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Opazovanje rezultatov, iskanje pravila

Geometrijska demonstracija

				9
			7	
		5		
	3			
1				

Primeri induktivnega sklepanja



- vsota notranjih kotov v n -kotniku
- število diagonal v n -kotniku
- vsota prvih n naravnih števil
- vsota kvadratov prvih n naravnih števil
- Pickov izrek:

Za poljubni večkotnik na celoštevilski kvadratni mreži velja, da je njegova ploščina enaka

$$S = I + \frac{1}{2}B - 1,$$

kjer je B število točk mreže na robu večkotnika in I število točk mreže v notranjosti večkotnika.

(KUPM 2012)

Primeri induktivnega sklepanja



Seštevanje in odštevanje
racionalnih števil

$$5-4=1$$

$$5-3=2$$

$$5-2=3$$

$$5-1=4$$

$$5-0=5$$

$$5-(-1)=6$$

Definicija potence z negativnim
eksponentom

$$5^4 = 625$$

$$5^3 = 125$$

$$5^2 = 25$$

$$5^1 = 5$$

$$5^0 = 1$$

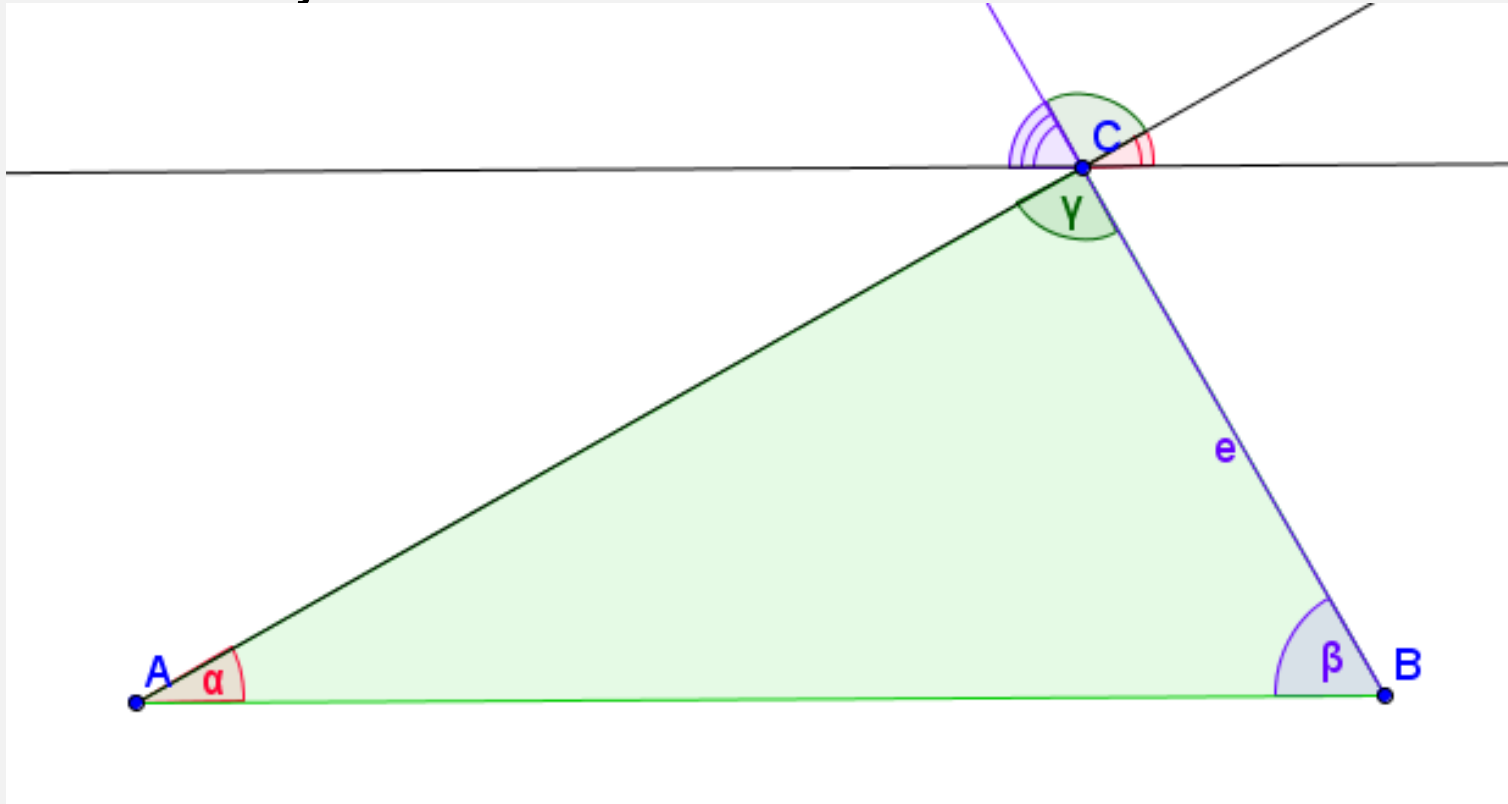
$$5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$1^0 = 1 \quad 2^0 = 1 \quad 3^0 = 1 \quad \left(\frac{4}{5}\right)^0 = 1 \quad 0^0 = ?$$

Vrste dokazov

- Direktno dokazovanje:
vsota notranjih kotov v trikotniku



Različne dejavnosti: trganje in sestavljanje kotov, uporaba programov dinamične geometrije

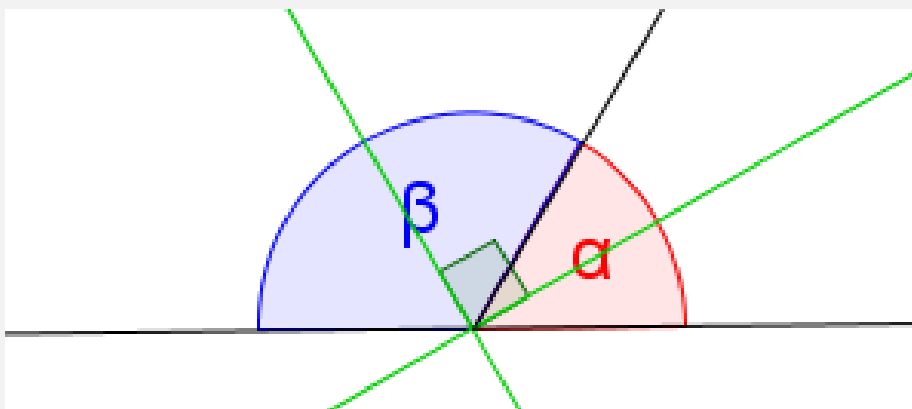




Vrste dokazov

Raziščimo kot med simetralama dveh sokotov.

Demonstracija s primerom:



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$
$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ$$

Različni dokazi

Dokaži z matematično indukcijo:

$120 \mid (n^5 - 5n^3 + 4n)$ za vsako naravno število (Tempus, 2014)



Direkten dokaz: razstavimo algebrski izraz, ugotovimo da je produkt petih zaporednih naravnih števil

$$(n^5 - 5n^3 + 4n) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$$

Dokaz s protislovjem: $\sqrt{2}$ je iracionalno število

Kakšna znanost je matematika?



Matematika je nenehna gradnja matematičnih dokazov, definicije in izreki pa so samo smerniki na prehojeni poti. (Skohord)

