

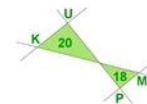
BLOČNA ALGEBRA

URŠKA PUNCER

Šolski center Velenje



4. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike KUPM 2018



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



Zakon o zamenjavi, zakon o poljubnem združevanju, zakon o razčlenjevanju...

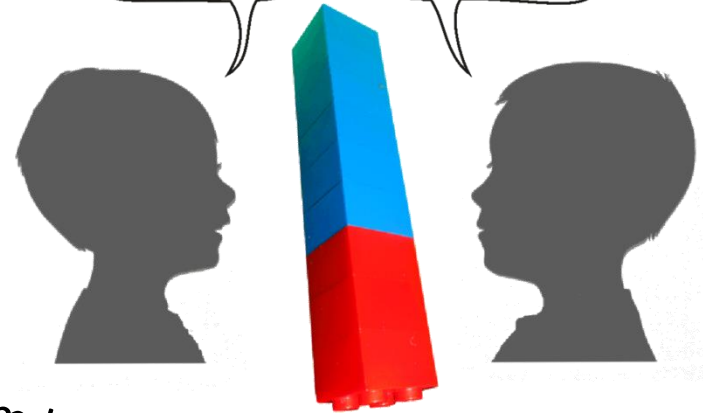
$$6 + 3 = 3 + 6$$

ODZIVI DIJAKOV:

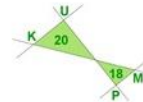
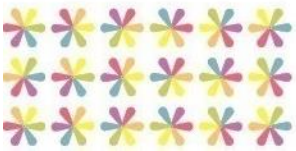
Zakaj to moramo znati...

Pa saj je očitno...

Kje nam bo pa to prav prišlo...

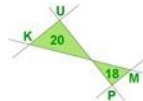


Bločna algebra, ki se uporablja pri modeliranju, je primer uporabe računskih zakonov tudi v praksi.



Temo obravnavamo

- Proti koncu 1. letnika tehniške šole
- Z uporabo delovnega lista
- V skupinah s 3 ali 4 dijaki



Delovni list

Delovni list: BLOČNA ALGEBRA

Osnovni pojmi:

ime	simbol	Matematična enačba
Blok		$b = a \cdot G$
Sumacijska točka (ponazarja seštevanje ali odštevanje dveh signalov)		$c = a \pm b$
Razcepšče (pove, da določen signal deluje na različnih mestih v bločnem diagramu)		
Povratna zanka		

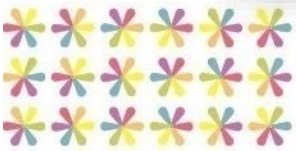
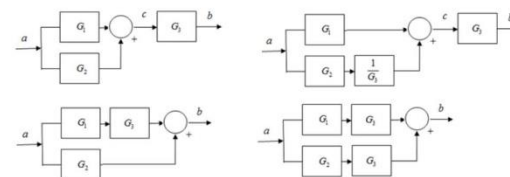
Osnovna pravila algebre:

ime	Ekvivalentna diagrama in dokaz ekvivalence	Kaj smo uporabili?
1 Redukcija zaporedne vezave		
2 Redukcija vzporedne vezave		
3 Redukcija zanke		
4 Zamenjava vrstnega reda zaporednih funkcionalnih blokov		

5	Zamenjava vrstnega reda zaporednih sumacijskih točk:		
6	Zamenjava vrstnega reda zaporednih razcepšč:		
7	Premik sumacijske točke za blok		
8	Premik sumacijske točke pred blok		

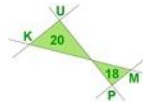
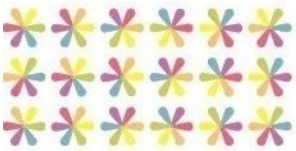
Naloga:

Na sliki so štiri diagrami. Z uporabo zgornjih pravil ugotovi, kateri so ekvivalentni in jih ponovni do osnovne oblike.


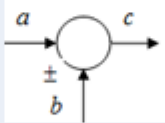
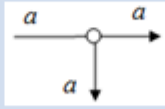
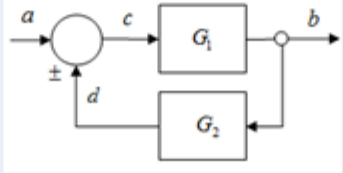


UVOD V URO

- Modeliranje je postopek, s katerim realni proces pretvorimo na matematični model.
- Modeliranje se velikokrat uporablja na elektro področju pri vodenju sistemov.
- Prednost bločnih diagramov je njihova nazornost in preglednost.




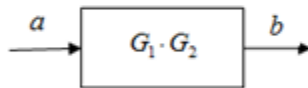
OSNOVNI POJMI

<p>Blok (Na levi strani je vhodni signal, na desni pa izhodni signal. Blok na sredini pove zvezo med vhomom in izhodom)</p>		$b = a \cdot G$
<p>Sumacijska točka (ponazarja seštevanje ali odštevanje dveh signalov)</p>		$c = a \pm b$
<p>Razcepišče (pove, da določen signal deluje na različnih mestih v bločnem diagramu)</p>		
<p>Povratna zanka</p>		



PRAVILA ALGEBRE

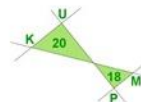
Za dokazovanje izpišemo enačbe iz levega diagrama in jih preoblikujemo v enačbo, ki ustreza desnemu diagramu.

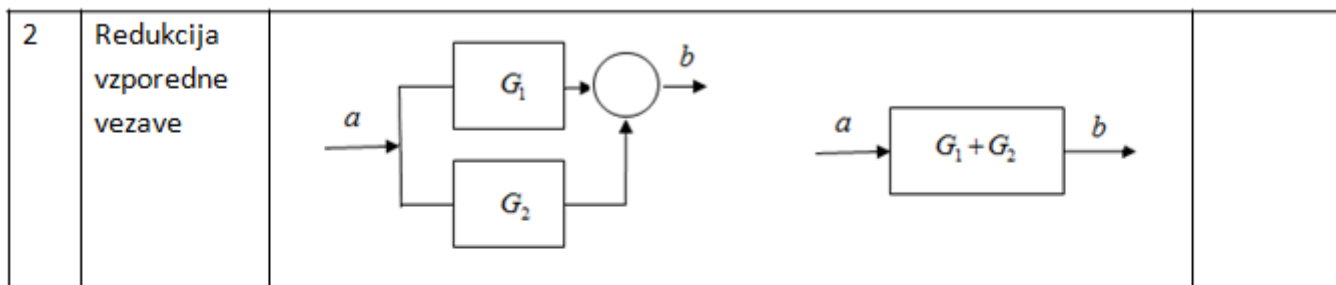
	ime	Ekvivalentna diagrama	Kaj smo uporabili?
1	Redukcija zaporedne vezave	 	

Za prvi diagram velja $b = c \cdot G_2$ in $c = a \cdot G_1$

Enačbi združimo: $b = c \cdot G_2 = (a \cdot G_1) \cdot G_2 = a \cdot (G_1 \cdot G_2)$

Uporabili smo: asociativnostni zakon za množenje



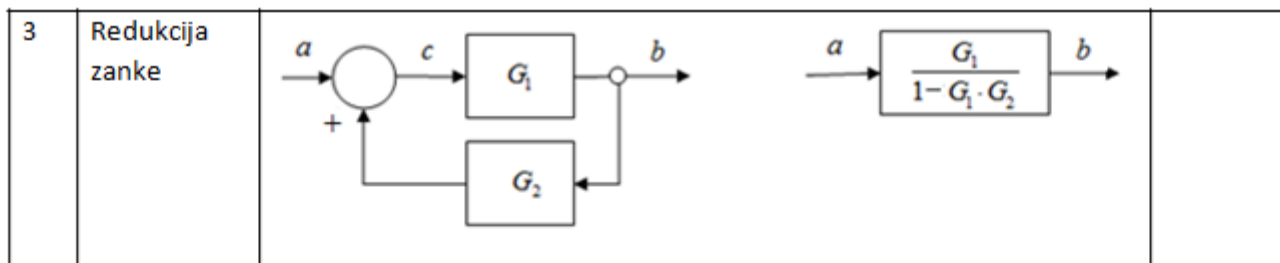


Za prvi diagram velja $b = a \cdot G_1 + a \cdot G_2$

Izpostavimo a in dobimo $b = a \cdot (G_1 + G_2)$

Uporabili smo: izpostavljanje skupnega faktorja





Za prvi diagram veljata enačbi $b = c \cdot G_1$ in $c = a + b \cdot G_2$

Če enačbi združimo, dobimo $b = c \cdot G_1 = (a + b \cdot G_2) \cdot G_1 = a \cdot G_1 + b \cdot G_2 \cdot G_1$

Iz enačbe izrazimo b in dobimo $b - b \cdot G_2 \cdot G_1 = a \cdot G_1$

$$b \cdot (1 - G_2 \cdot G_1) = a \cdot G_1$$


$$b = \frac{G_1}{1 - G_1 \cdot G_2} \cdot a; \quad G_1 \cdot G_2 \neq 1$$

Za $G_1 \cdot G_2 = 1$ velja $b \cdot 0 = a \cdot G_1$ in zato $a = 0$

Uporabili smo: sistem enačb, distributivnostni zakon, izpostavljanje skupnega faktorja, obravnavanje linearne enačbe s parametri

Redukcijo zanke je najtežje dokazati, zato ta dokaz naredimo skupaj.

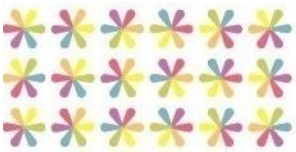


4	Zamenjava vrstnega reda zaporednih blokov	
---	---	--

Iz prve točke sledi, da lahko enačbi prvega diagrama združimo in zapišemo kot $b = a \cdot G_1 \cdot G_2$

$b = a \cdot G_1 \cdot G_2 = a \cdot G_2 \cdot G_1 = d \cdot G_1$, kjer je $d = a \cdot G_2$. To pa sta enačbi drugega diagrama.

Uporabili smo: komutativnostni zakon za množenje



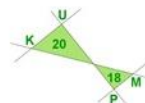
5	Zamenjava vrstnega reda zaporednih sumacijskih točk:	
---	--	--

Prvemu diagramu pripada enačba $d = (a \pm b) \pm c$. Preoblikujemo:

$$d = (a \pm b) \pm c = a + (\pm b \pm c) = a + (\pm c \pm b) = (a \pm c) \pm b, \text{ kar je enačba drugega diagrama.}$$

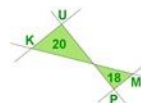
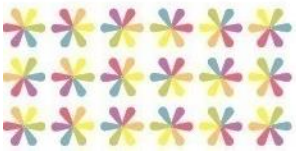
Uporabili smo: asociativnostni in komutativnostni zakon za seštevanje


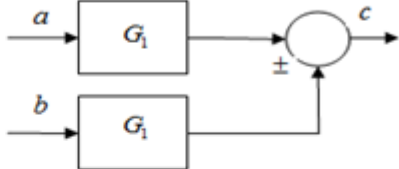
Pri tej točki dijake opozorim na izpostavljanje plusa pred oklepajem.



6	Zamenjava vrstnega reda zaporednih razcepišč		
---	--	--	--

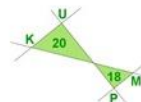
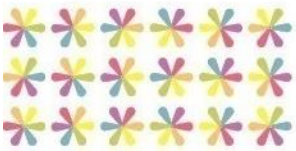
Razcepišče pomeni, da isti signal deluje na različnih mestih, zato lahko razcepišča med sabo menjamo.

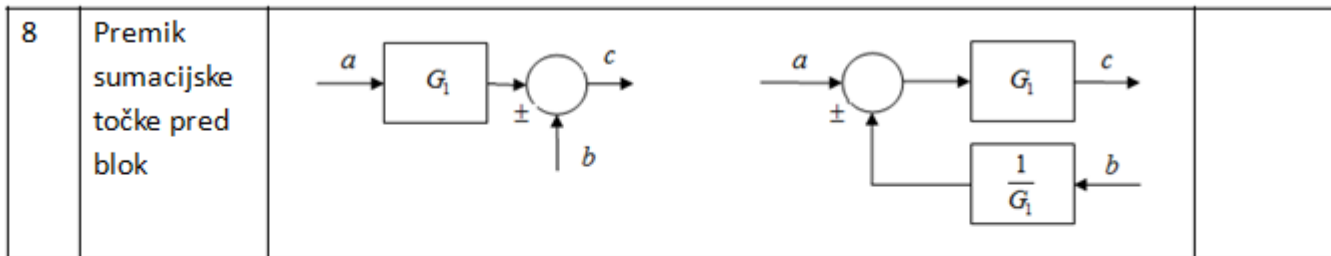


7	Premik sumacijske točke za blok			
---	---------------------------------	---	---	--

Prvemu diagramu pripada enačba $c = (a \pm b) \cdot G_1 = a \cdot G_1 \pm b \cdot G_1$

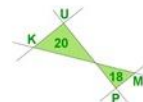
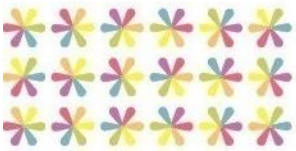
Uporabili smo: distributivnostni zakon





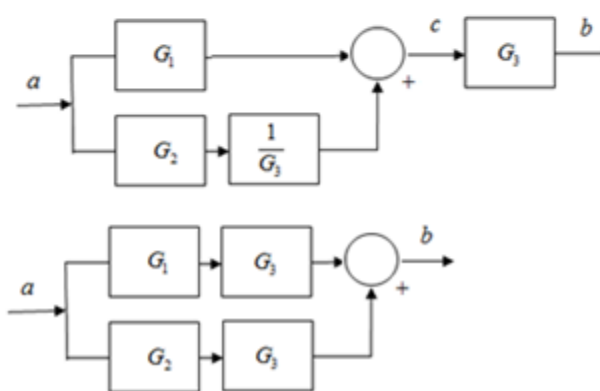
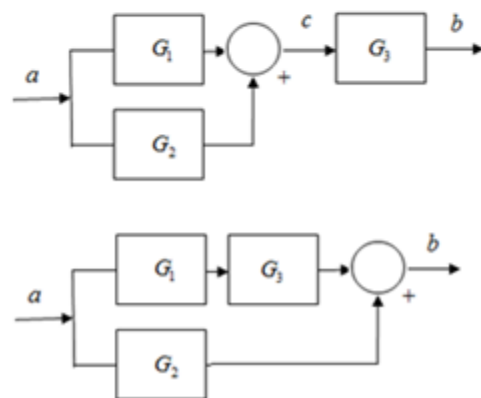
Dokaz:
$$c = a \cdot G_1 \pm b = a \cdot G_1 \pm b \cdot \frac{1}{G_1} \cdot G_1 = \left(a \pm b \cdot \frac{1}{G_1} \right) \cdot G_1$$

Uporabili smo: izpostavljanje skupnega faktorja, obratna vrednost

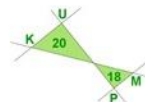
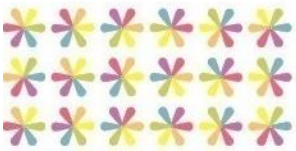
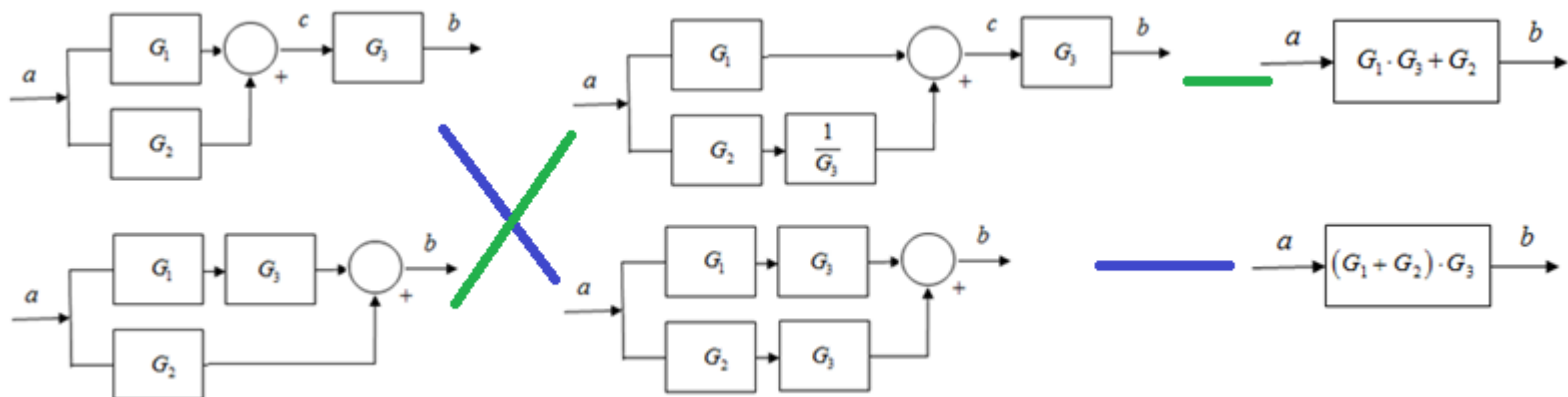


Po pregledu tabele s pravili sledi naloga, v kateri ta pravila uporabimo:

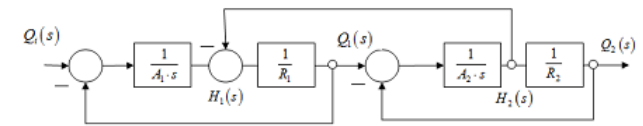
Na sliki so štirje diagrami. Z uporabo zgornjih pravil ugotovi, kateri so ekvivalentni in jih poenostavi do osnovne oblike.



Rešitev:



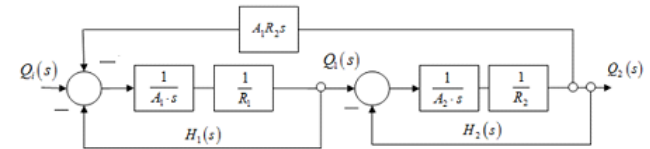
Za konec pokažem sliko uporabe danih pravil na konkretnem primeru - hidravličnem sistemu z dvema nivojskima posodama, ki ga obravnavajo študentje pri predmetu vodenje sistemov.



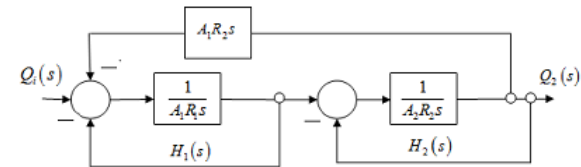
Bločni diagram dvo-posodnega hidravličnega sistema

Dobljeni diagram sedaj z uporabo pravil algebre poenostavimo.

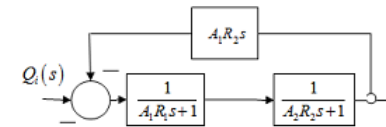
Najprej pomaknemo drugo sumacijsko točko na levo ter drugo razcepišče na desno.



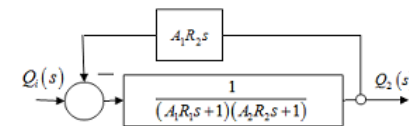
S tem smo pridobili dve zaporedni vezavi, ki ju združimo in dobimo



Sedaj odpravimo povratni zanki in dobimo

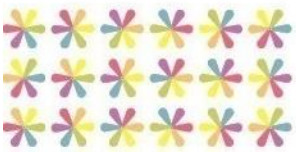


Zopet smo dobili zaporedno vezavo, ki jo poenostavimo.



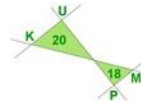
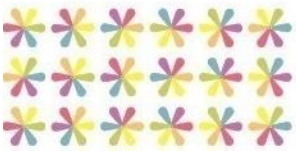
Odpravimo še zadnji povratni zanko. Po formuli dobimo

$$Q_1(s) \rightarrow \frac{1}{A_1 A_2 R_1 R_2 s^2 + (A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2) s + 1} Q_2(s)$$



V opisani uri dijaki...

- spoznajo uporabnost računskih zakonov, ki so jim na ravni števil tako samoumevni,
- se urijo v dokazovanju,
- se urijo v preoblikovanju enačb,
- diagrame povezujejo z enačbami in obratno,
- sodelujejo in si pomagajo (skupinsko delo)
- spoznajo uporabnost matematike v praksi



Hvala za vašo pozornost!

