MATEMATIČNO PREISKOVANJE V TRETJI TRIADI

TEJA ŠKRJANEC

OŠ Davorina Jenka Cerklje na Gorenjskem

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT

EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

KORAKI MATEMATIČNE PREISKAVE

1. Izziv
2. Postavitev vprašanja
3. Izvedba/reševanje
4. Opis/ugotovitve
5. Razlaga/utemeljitev
6. Predstavitev

PRVE MATEMATIČNE RAZISKAVE

Razišči, s katerimi števkami se končujejo vrednosti potence $2^n, n \in \mathbb{N}$

Ali je zadnja števka liha?

Koliko različnih števk je na zadnjem mestu?

$\mathbf{2^1 = 2}$	$\mathbf{2^5 = 32}$	$\mathbf{2^9 = 512}$	$\mathbf{2^{13} = 8\,192}$
$\mathbf{2^2 = 4}$	$\mathbf{2^6 = 64}$	$\mathbf{2^{10} = 1024}$	$\mathbf{2^{14} = 16\,384}$
$\mathbf{2^3 = 8}$	$\mathbf{2^7 = 128}$	$\mathbf{2^{11} = 2048}$	$\mathbf{2^{15} = 32\,768}$
$\mathbf{2^4 = 16}$	$\mathbf{2^8 = 256}$	$\mathbf{2^{12} = 4096}$	$\mathbf{2^{16} = 65\,536}$

PRVE MATEMATIČNE RAZISKAVE

Vrednosti potenc se končujejo s števkami 2, 4, 6 in 8. Torej je zadnja števka soda, razen 0.

Števke se ponavljajo vedno v istem zaporedju 2, 4, 8, 6; 2, 4, 8, 6 … Na zadnjem mestu so torej lahko štiri različne sode števke.

Eksponenti 1, 5, 9, 13 … končujejo vrednost potence z 2.

Eksponenti 2, 6, 10, 14 … končujejo vrednost potence s 4.

Eksponenti 3, 7, 11, 15 … končujejo vrednost potence z 8.

Eksponenti 4, 8, 12, 16 … končujejo vrednost potence s 6.

Zavod Republike Slovenije za šolstvo
REPUBLIKA SLOVENIJA MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT
EVROPSKA UNIJA EVROPSKI SOCIALNI SKLAD NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

PRVE MATEMATIČNE RAZISKAVE

Zadnja števka ne more biti liha, saj je produkt enakih sodih števil vedno sodo število.

Npr. računski dokaz

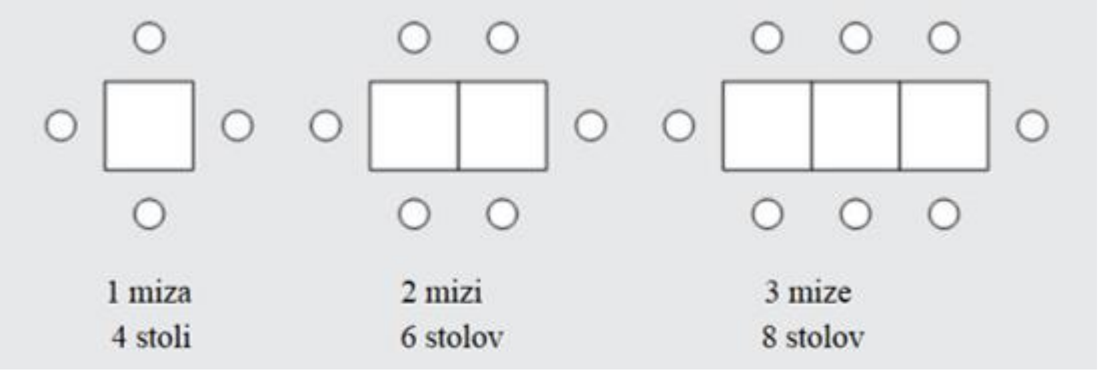
$$2 \cdot 2 = 4$$
$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$
$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$
$$\ldots$$

Npr. splošni dokaz

Zadnja števka je torej vedno sodo število 2, 4, 6 ali 8, razen 0. Druge možnosti ni, saj smo s sistematičnim preiskovanjem preverili vse možnosti.

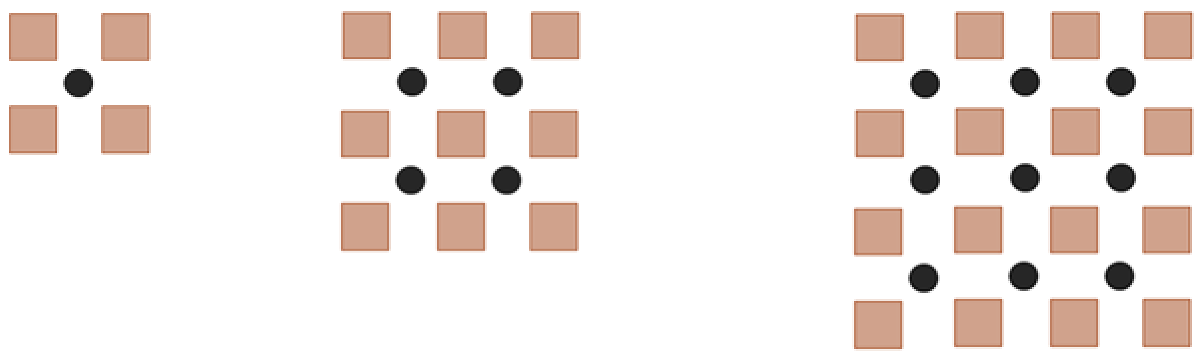
ŠE NEKAJ PRIMEROV

- Razišči količnike, ki nastanejo pri deljenju števila 1 z naravnim številom.
- Razišči, katera naravna števila lahko zapišemo kot vsoto dveh, treh, štirih … zaporednih naravnih števil.
- Razišči kvadrate dvomestnih, tromestnih … naravnih števil, ki imajo zadnjo števko 5.
- V restavraciji postavljajo mize skupaj v eni vrsti na način, kot je ponazorjeno na naslednjih treh slikah.



IZDELKI UČENCEV I

V neki vasici v starem veku so okrog vodnjakov gradili domove (hiše) na način, kot je ponazorjeno na naslednjih treh slikah.



Legenda:

● Vodnjak

■ Dom (hiša)

IZDELKI UČENCEV I

VPRAŠANJE: Kakšna je enačba za izračun števila domov in vodnjakov?

Ali opaziš pri vsoti števil domov in vodnjakov kakšno zaporedje? Ali so mogoče vsa vsote števila liha?

2. Postaviter vprašanja

a) Za koliko se povečuje število novih hiš glede na število novih vodnjakov?

b) Kako lahko izračunaš število hiš glede na število vodnjakov?

2) VPRAŠANJE:

- koliko hiš in koliko vodnjakov bo na sliki številka 4?
- za koliko je število hiš večje od števila vodnjakov na sliki ? obstaja katšno določljivo zaporedje? Česa?

VPRAŠANJE:

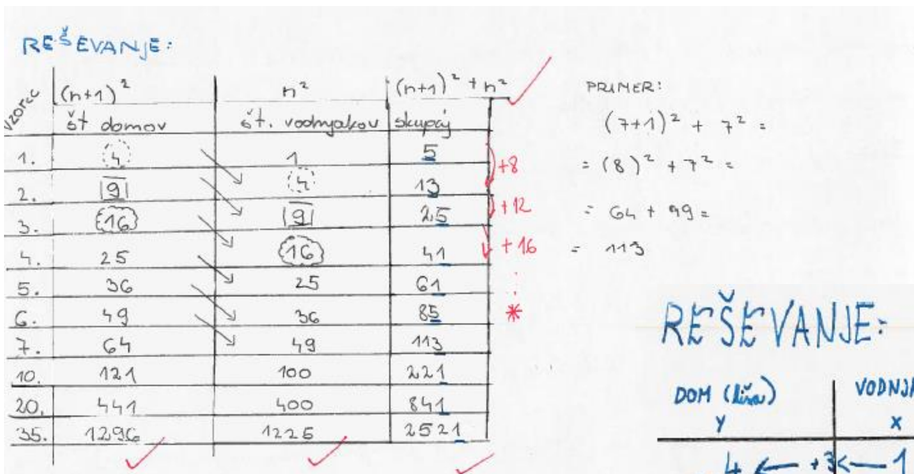
Ali se število vseh zgradb povečuje v konstantnem zaporedju?

Ali sta količini odvisni?

Če sta, katera je neodvisna in katera odvisna?

Kakšno je zaporedje št. vodnjakov in hiš?

IZDELKI UČENCEV I



REŠEVANJE:

VZOREC	$(n+1)^2$ št. domov	n^2 št. vodnjakov	$(n+1)^2+n^2$ skupaj	
1.	4	1	5	+8
2.	9	4	13	+12
3.	16	9	25	+16
4.	25	16	41	
5.	36	25	61	
6.	49	36	85	
7.	64	49	113	
10.	121	100	221	
20.	441	400	841	
35.	1296	1226	2521	

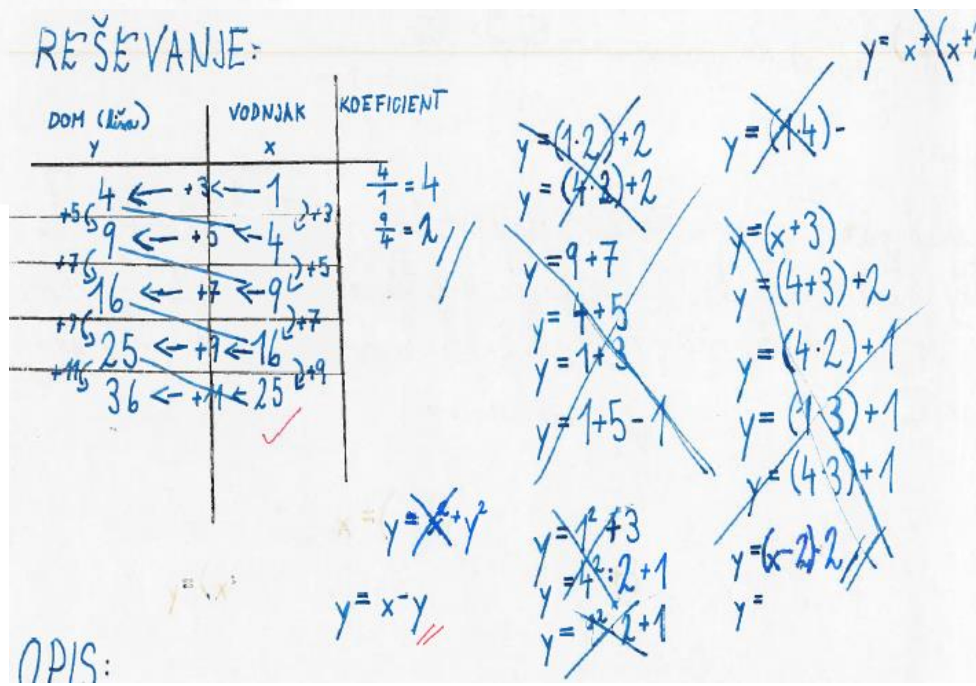
PRIMER:

$(7+1)^2 + 7^2 =$

$= (8)^2 + 7^2 =$

$= 64 + 49 =$

$= 113$



REŠEVANJE:

DOM (hiša) y	VODNJAK x	KOEFICIENT
4 ← +3 ←	1	$\frac{4}{1} = 4$
9 ← +5 ←	4	$\frac{9}{4} = 2$ //
16 ← +7 ←	9	
25 ← +9 ←	16	
36 ← +11 ←	25	

$y = (1 \cdot 2) + 2$

$y = (4 \cdot 2) + 2$

$y = 9 + 7$

$y = 4 + 5$

$y = 1 + 3$

$y = 1 + 5 - 1$

$y = (x+3)$

$y = (4+3) + 2$

$y = (4 \cdot 2) + 1$

$y = (1 \cdot 3) + 1$

$y = (4 \cdot 3) + 1$

$y = (x-2) \cdot 2$

$y = x^2 + y^2$

$y = x - y$ //

OPIS:

IZDELKI UČENCEV I

3.

vodnjak	1.	4	9	16	25	36	49	64
Dom	4	9	16	25	36	49	64	81
skupaj	5	13	25	41	61	85	113	145

HIŠE:
1. 4 +5 (1+3, 4+5)
2. 9 +7 (9+7)
3. 16 +9 (16+9)
4. 25 +11 (25+11)
5. 36 +13 (36+13)
6. 49

VODNJAKI:
1. 1 +3 (1+3)
2. 4 +5 (4+5)
3. 9 +7 (9+7)
4. 16 +9 (16+9)
5. 25 +11 (25+11)
6. 36

3. Izvedba/reševanje

št. vodnjakov	1	4	9	16	25	36	49	63	79	96
	+3	+5	+7	+9	+11	+13	+14 (15)	+18 (17)	+17	+19
št. hiš	4	9	16	25	36	49	63	77	96	116

štetje!

IZVEDBA:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	10.	12.	enačba
št. vodnjakov	1	4	9	16	25	36	100	142 (4)	n·n
št. hiš	4	9	16	25	36	100	142 (121)	169	n_2 = ali (n+1)·(n+1) ZAPIS!
št. vseh zgradb	5	13	25	41	61	136	242	311	$(n \cdot n) + n_2$

IZDELKI UČENCEV I

UGOTOVITVE

m= št. vodnjakov

Št. vodnjakov se poveča za 3, 5, 7, 9... To so zaporedna liha števila. Ta ne vključujejo št. 1.

Število hiš se poveča za 5, 7, 9, 11... To so zaporedna liha števila, ki pa ne vključujejo števila 1 in 3.

Če imamo neznamo število hiš in znamo število vodnjakov, št. hiš dobimo tako, da št. vodnjakov prištejemo št. 3, 5, 7, 9...
To so prav tako liha števila. Ne vključujejo št. 1.

Se pravi naslednje št. vodnjakov je enako št. hiš, pri prejšnjem (prejšnih) vodnjaku/ih.

m = št. 3, 5, 7, 9, 11...

Formula za izračun vodnjakov: m + m

m= št. vodnjakov

vodnjaki ne morejo biti kar vsa števila.
Lahko so le 1, 4, 9...

~~UTEMELJITEV~~

Premalo natančna formula!
npr. 2 + 5 = 7

Da količini sta odvisni, saj je od števila vodnjakov odvisno število hiš, zato je št. vodnjakov neodvisna količina, št. hiš pa odvisna.

IZDELKI UČENCEV I

Formula
~~Enačba~~ za zapis zaporedja hiš je: $(n+1)^2$.
Formula za zapis števila vodnjakov pa je: n^2
• seštevek (vodnjaki + hiše) se povečuje za ~~4~~, ~~8, 12, 16, 20, 24, 28...~~ večkratnike 4 (brez 4) (+8, +12, +16...)
~~vedno je več hiš~~ V katerem koli primeru je število hiš večje od števila vodnjakov.
število hiš je ~~vedno~~ kvadrat naslednjega števila vodnjakov (npr. 9 vodnjakov (primer 3) je to 3^2, število hiš $(3+1)^2 = 4^2 = 16$).
Primer si dobro zapisal, ugotovitev sama pa ne drži!
• seštevek vodnjakov in hiš je vedno liho število.

IZDELKI UČENCEV I

Pri številu vodnjakov opazimo, da so kvadrati od ~~#~~ števila vzorca. Torej če govorimo o npr. 5 vzorcu ima št. vodnjakov zagotovo 25, ker $5^2 = 25$. Pri vzorcu smo opazili tudi, da lahko število hiš, št. vodnjakov in št. hiš in vodnjakov skupaj, zapišemo z izrazom s sprem ~~spremenljivk~~

Za št. hiš je določen izraz: $(n+1)^2$ Primer: $(5+1)^2 = 6^2 = $

Za št. vodnjakov je določen izraz: n^2

5. vzorec

Za št. vseh skupaj (vodnjakov in hiš): $n^2 + (n+1)^2$

Kaj mora veljati za n^2

5. Ker je št. vodnjakov v

IZDELKI UČENCEV I

(1) Razlika med št. hiš in vodnjakov se ~~...~~ poveča za 2.

(2) ~~Št. vodnjakov se~~ Razlika med ~~...~~ zaporednimi št. vodnjakov se poveča za 2. Prav tako št. hiš

(3) Vsa št. vodnjakov oz. hiš so kvadrati zaporednih števil.

(4) Št. hiš je v enem primeru je enako št. vodnjakov v naslednjem primeru.

(5) Razlike med vsotami števil hiš in vodnjakov, so večkratniki št. 4.

(10) Ena od št. količin (izmenjujeta se: hiša-vodnjak-hiša-...) je večkratnik št. 4.

(9) Količini sta med seboj odvisni. Število hiš je odvisno od števila vodnjakov.

(5)

(8) Produkti št. vodnjakov in hiš so vedno večkratniki št. 4.

(7) Formula za x:

$x=(\sqrt{y}-1)^2$ | $x=(\sqrt{y}-1)^2$
$x=(\sqrt{100}-1)^2$ | $x=(\sqrt{64}-1)^2$
$x=9^2$ | $x=7^2$
$x=\underline{81}$ ✓ | $x=\underline{49}$ ✓

(6.) Formula: $y=(\sqrt{x}+1)^2$

$y=(\sqrt{81}+1)^2$ | $y=(\sqrt{49}+1)^2$
$y=(10)^2$ | $y=(8)^2$
$y=\underline{100}$ ✓ | $y=\underline{64}$ ✓

IZDELKI UČENCEV I

RAZLAGA:

Zadnja števka v vsoti je vedno liho, zato ker v zaporedju vedno dobimo eno število sodo, eno pa liho. Npr. 36 + 25 = 61

sodo liho liho

Zato je potem zadnja števka vedno liha.

121 + 100 = 221

liho sodo liho

Število vodnjakov je enako enemu zaporedju prej-domov zato, ker:

- če imamo npr. 6. zaporedje je št. domov 49, vendar moramo prišteti 1 in potem izračunati kvadrat.

  Ali k 49 ali 6?

- v 7. zaporedju pa za število vodnjakov izračunamo samo kvadrat (7^2) in nič ne prištevamo, dobimo 49.

Zato si to zaporedje sledi vseskozi, razen, če ne gremo po vrsti.

IZDELKI UČENCEV I

Hiše izračunaš lahko tudi tako da vrsto hiš daš n^2

5. Razlaga/utemeljitev

Kaj mora veljati za n?

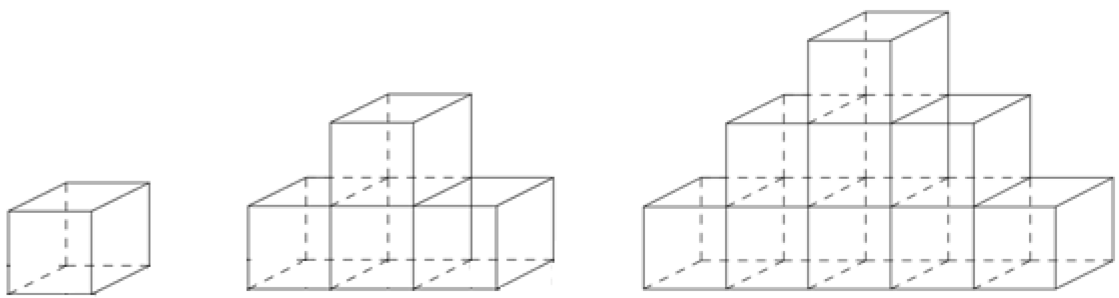
a) Formula za izračun nove vrste hiš je.

$y+2=x$

b) Število hiš izračunaš tako da število vodijev seštejiš s ~~popravadi~~ lihimi številom.

IZDELKI UČENCEV II

Skladne kocke zlagamo na način kot je ponazorjeno na naslednjih treh slikah.



IZDELKI UČENCEV II

~ Ali obstaja splošna enačba za izračun prostornine?

~ Ali se med zaporednimi telesi pojavlja vzorec povečanja števila kock?

Kako se veča število kock v posamezni vrsti?

Kako ugotovimo koliko kock je v zadnji vrsti katere koli razporeditve?

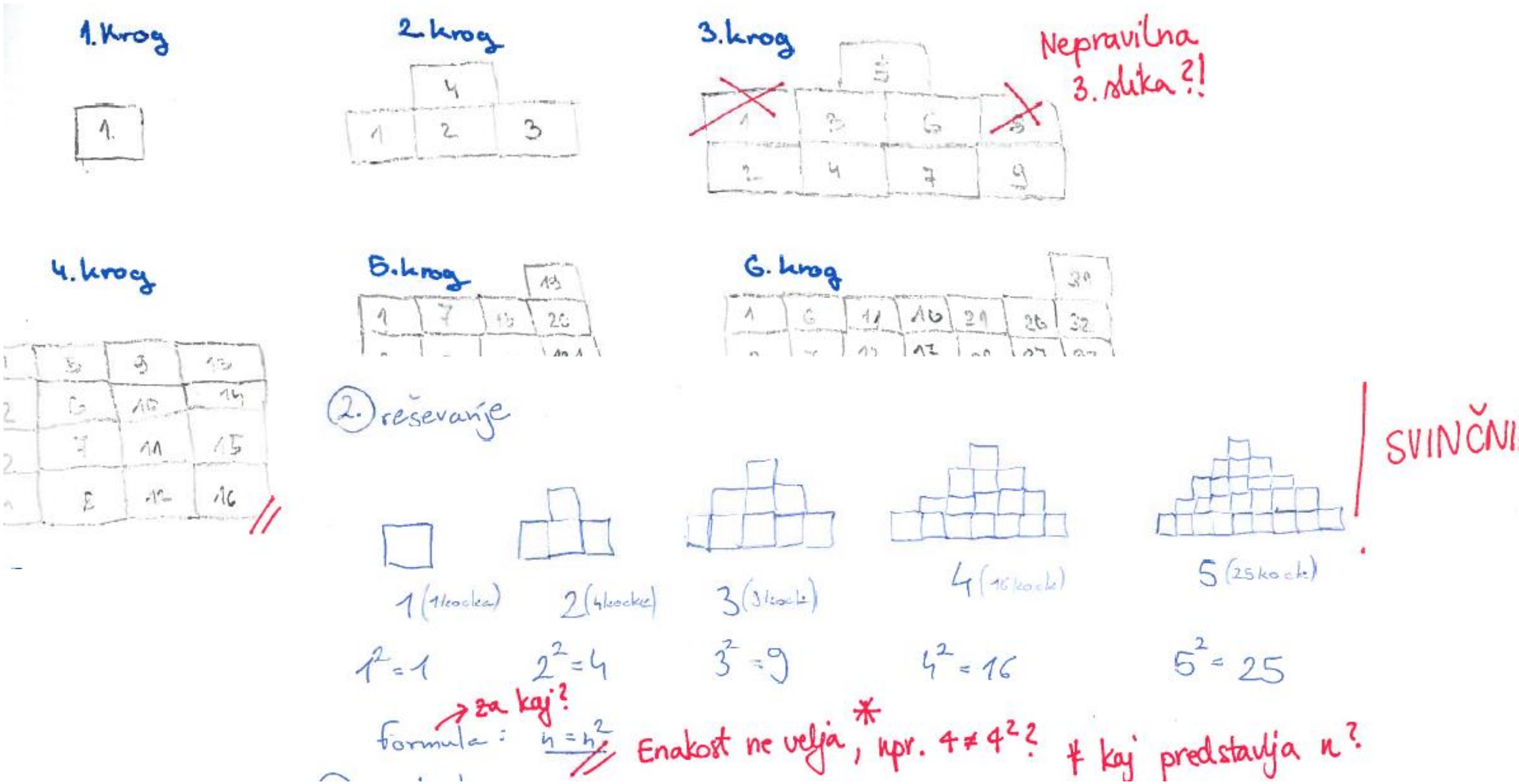
Kaj ves čas ostaja nespremenjeno.?

Za koliko se povečuje število kock?

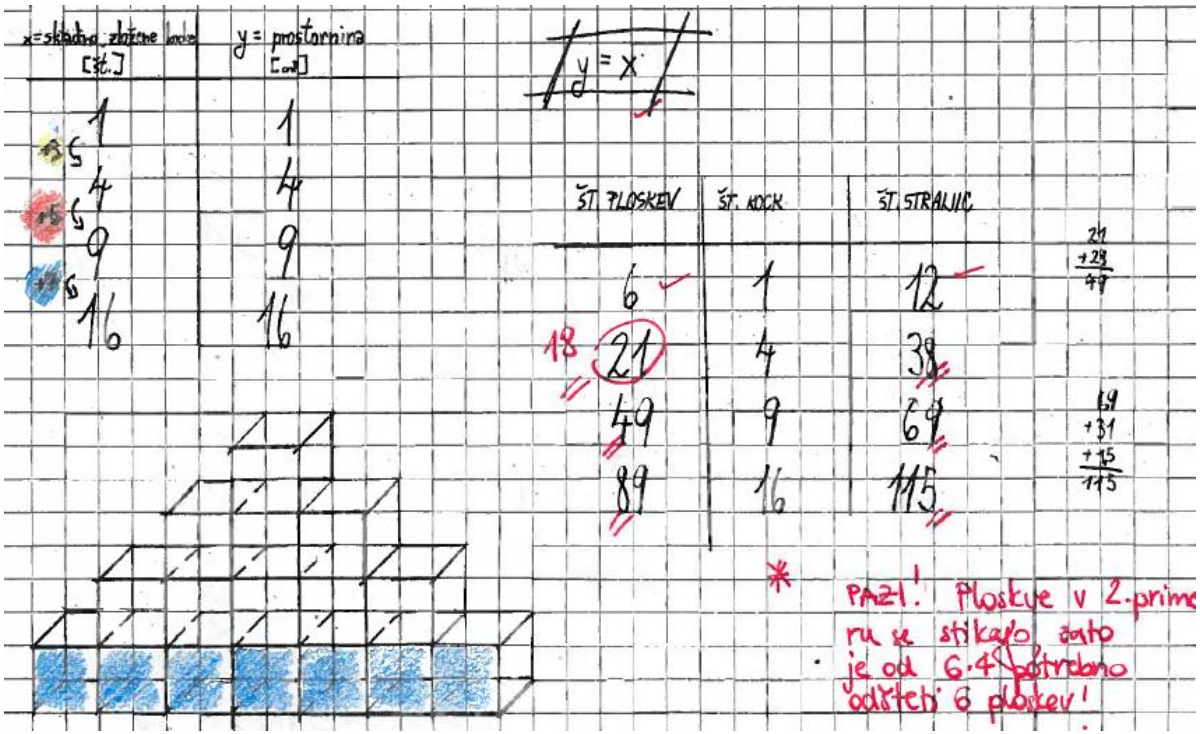
Kolikšna je prostornina lika?!? Lik nima prostornine, le-to ima telo.

Kolikšna je površina lika?

IZDELKI UČENCEV II

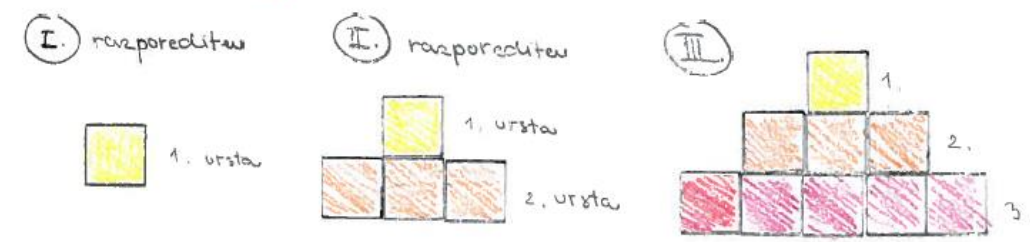


IZDELKI UČENCEV II



IZDELKI UČENCEV II

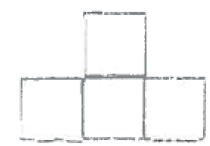
3. REŠEVANJE:



IV.

razporeditev	št. kock	št. kock v 1. vrsti	št. kock v 2. vrsti	-''- 3. vrsta	-''- 4. vrsta
I.	1	1	/	/	/
II.	4	1	3	/	/
III.	9	1	3	5	/
IV.	16	1	3	5	7
X	100	1	3	5	7
n	n^2	1	3	5	7

* LEGENDA:

 → razporeditev

ARABSKE ŠTEVILKE (1., 2., 3.) → vrste

RIMSKE ŠTEVILKE (I., II., III.) → številka razporeditve

IZDELKI UČENCEV II

V 1. vrsti je vedno ena kocka, v 2. vedno tri, v 3. vedno 5 .... Število kock se v vsaki vrsti poveča za dve.

Če želimo izračunati število kock v zadnji vrsti katerekoli razporeditve uporabimo formulo $2n - 1$. Kaj je n? Npr. pri šesti razporeditvi: $n = 6$, $2 \cdot n - 1$, $2 \cdot 6 - 1 = \underline{\underline{11}}$ kock. (glej zgornji primer).

Če kocke razporejamo po vrsti (glej pri reševanju), lahko vidimo, da se pri posamezni razporeditvi veča le število kock v zadnji vrsti, v vseh prejšnjih vrstah pa število kock ostaja nespremenjeno

Zavod Republike Slovenije za šolstvo
REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT
EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

IZDELKI UČENCEV II

Število kock se povečuje za 3, 5, 7, 9 ... To so zaporedna liha števila.

Formula za izračun števila kock je n^2. ✓ $\# n \in \mathbb{N}$

Volumen oz. prostornino ene kocke dobimo s formulo $V = a^3$ ✓ # kaj je a? ✓✓

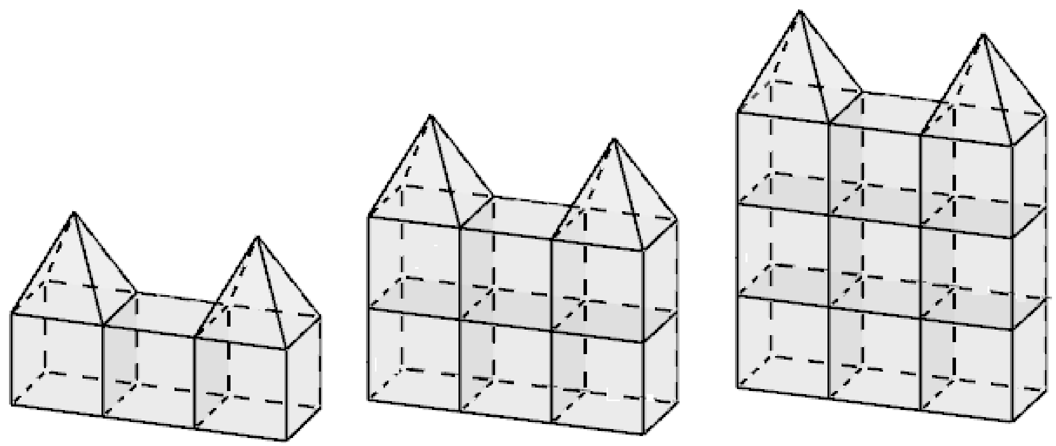
Formula za izračun prostornine lika sestavljenega iz kock pa je $V_n = n^2\ a^3$. $\# n \in \mathbb{N}$

Površino ene kocke dobimo s formulo $P = 6a^2$. ✓

Formula za izračun površine lika sestavljenega iz kock pa je $P_n = n^2 \cdot 6a^2 - (n-1)^2 \cdot 2a^2$ // #

IZDELKI UČENCEV III

Skladne kocke in skladne pokončne piramide zlagamo na način kot je ponazorjeno na naslednjih treh slikah. Višina kocke je enaka višini piramide.



IZDELKI UČENCEV III

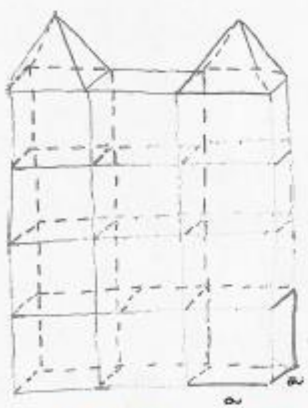
VPRAŠANJE

Za koliko se povečuje število kock?

Kakšna je prostornina novega telesa?

Ali se število piramid spreminja?

REŠEVANJE



4 ~~kocke~~ telo

	št. kock	št. piramid
1 telo	3	2
2 telo	6	2
3 telo	9	2
4 telo	12	2
5 telo	15	2
n telo	n 3	2

$a \in \mathbb{R}^+$

$n \in \mathbb{N}$

V kocke = O v

$V = a\,a\,a$

$V = a^3$ → volumen 1 kocke

V piramide $= \dfrac{O \cdot v}{3}$

$V = \dfrac{a \cdot a \cdot a}{3}$

$V = \dfrac{a^3}{3}$ → volumen 1 piramide

	(Volumen) Prostornina $= V^3$
1 telo	$V = 2 \dfrac{a^3}{3} + 3 \cdot a^3$
2 telo	$V = 2 \cdot \dfrac{a^3}{3} + 6\,a^3$
3 telo	$V = 2 \cdot \dfrac{a^3}{3} + 9\,a^3$
4 telo	$V = 2 \dfrac{a^3}{3} + 12\,a^3$
5 telo	$V = 2 \dfrac{a^3}{3} + 15\,a^3$
n telo	$V = 2 \dfrac{a^3}{3} + n \cdot 3 \cdot a^3$

$v = a$

IZDELKI UČENCEV III

UGOTOVITVE

Število kock se vsakič poveča za 3. Vsako novo telo ima 3 kocke več, kot prejšno (1 telo = 3 kocke, 2 telo = 6 kock, 3 telo = 9 kock, 4 telo = 12 kock, 5 telo = 15 kock ...)

Formula za prostornino telesa je $V = 2 \cdot \frac{a^3}{3} + n \cdot 3 \cdot a^3$.

Število piramid je v vsakem telesu enako (število piramid je 2)

UTEMELJITEV

Formula za izračun števila kock je $n \cdot 3$.
n predstavlja število telesa (npr. 1 telo, 2 telo, 3 telo ...) in pripada množici naravnih števil.

Formula $V = 2 \cdot \frac{a^3}{3} + n \cdot 3 \cdot a^3$ je sestavljena iz formule za prostornino 1 kocke in prostornino 1 piramide (ki jo pomnožimo s številom piramid (z 2, saj sta v vsakem telesu 2 piramidi))
(ki jo nato pomnožimo s številom kock)

a predstavlja vse robove kocke, ki so med seboj enako dolgi, ter osnovne robove piramide, ki so enako dolgi kot višina piramide. a je lahko katero koli realno pozitivno št.

Število piramid ostaja enako, saj vsakemu novemu telesu dodajamo le po 3 nove kocke.

Zavod Republike Slovenije za šolstvo
REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT
EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

IZDELKI UČENCEV III

VPRAŠANJE: Kako lahko izračunamo prostornino ~~lika~~ telesa?
Kaj se pri zlaganju kock spreminja in kaj vedno ostane enako?

REŠEVANJE:

št. postavitve	št. kock	št. piramid	št. teles
I.	3	2	5
II.	6	2	8
III.	9	2	11
IV.	12	2	14
VIII.	24	2	26
n	n · 3	2	(n · 3) + 2

prostornina

a = 3e

kocka:

$V = a^3$

$V = 27\ e^3$

piramida:

$V = \frac{v \cdot ①}{3}$ = 3e

$V = \frac{9 \cdot ①}{3}$ *

$V = \frac{18}{3}$

$V = 6\ e^3$

$O = a^2$

$O = 9\ e^2$

št. postavitve	prostornina	V kock	V piramid
I.	93 e³	81 e³	12 e³
II.	174 e³	162 e³	12 e³
III.	255 e³	243 e³	12 e³
n	(n · 27e³) + 12e³	n · 27e³	12 e³

IZDELKI UČENCEV III

UGOTOVITVE in RAZLAGA:

Ugotovila sem, da pri vsaki postavitvi število piramid
ostaja enako, število kock pa se spreminja. Tudi število
stolpcev ves čas ostaja enako, torej trije
vrstic pa se veča. Torej pri vsaki novi
število kock poveča za 3. Število kock
z enačbo $n \cdot 3$. Črka n predstavlja
S tri pomnožimo zato, ker so v vsaki v
Če želimo izračunati, koliko je vseh tele
uporabimo enačbo $(n \cdot 3) + 2$. Dve prišt
vedno 2 piramidi.

~~Rečemo~~ Določimo, da osnovni rob kocke
To pomeni, da tudi višina piramide meri
Najprej izračunamo prostornino ene kocke, z
Nato pa še za piramido z enačbo $V = \frac{O \cdot v}{3}$.
izračunati prostornino celega telesa pa uporabimo enačbo:
$(n \cdot a^3) + \frac{O \cdot v}{3} \cdot 2$, če jo poenostavimo: $(n \cdot 27\ cm^3) + 12\ cm^3$

število postavitve

prostornina ene kocke

prostornina dveh piramid

Če si pogledamo prostornine celotnega telesa pri različnih postavitvah: $93\ cm^3$, $174\ cm^3$, $255\ cm^3$ .... Ugotovimo, da je razlika

+81

+81

piramid

med njimi vedno 81. To je zato, ker so v vsaki vrstici 3 kocke (vsaka izmed njih s prostornino $27\ cm^3$).

V vsaki novi postavitvi dodamo 3 kocke, kar pomeni, da, k vsaki novi postavitvi prištejemo $81\ cm^3$.

Torej, če vemo kolikšna je prostornina pri npr. III. postavitvi, lahko samo prištejemo $81\ cm^3$ in dobimo prostornino IV. postavitve.

Če hočemo

IZDELKI UČENCEV III

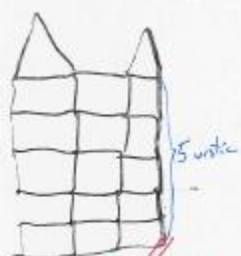
Vprašanje:

-V koliko vrsticah bi bile razvrščene kocke, če bi jih enako zlagali, v petem primeru?

- Volumen piramide je 9 dm^3. Ali je možno, da bi ~~izmerili~~ stehtali maso skulpturi v sedmem primeru na tehtnici, ~~ki~~ na kateri je največja dovoljena masa lahko 30 kg? Vse kocke in piramide so iz belega umetnega materiala, čigar ~~masa~~ gostota je $50 \frac{g}{dm^3}$.

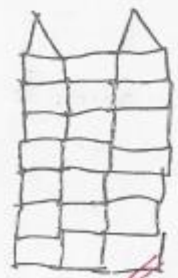
Izvedba reševanja:

5. primer



To je lik!

7. primer



Enačba, po kateri lahko izračunamo št. kock in piramid v posameznem primeru:

$n \cdot 3 + 2$

št. primera

$V_{\triangle} = 9 dm^3 \quad \left(V = \frac{O \cdot v}{3}\right)$

$V_{\square} = 27 dm^3 \qquad \rho = 50 \frac{g}{dm^3}$

$\rho = \frac{m}{V} \; / \cdot V$

$m_{\triangle} = \rho \cdot V_{\triangle}$

$m_{\triangle} = 50 \cdot 9$

$m_{\triangle} = 450 g$

$m_{\square} = \rho \cdot V_{\square}$

$m_{\square} = 50 \cdot 27$

$m_{\square} = 1350 g$

$m = 2 \cdot m_{\triangle} + 21 \cdot m_{\square}$

$m = 2 \cdot 450 + 21 \cdot 1350$

$m = 900 + 28350$