Razvijanje algebraičnega mišljenja na razredni stopnji osnovne šole

Dr. Vida Manfreda Kolar

Zavod Republike Slovenije za šolstvo
REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT
EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Pregled vsebine predavanja

1. Opredelitev pojmov: algebraično – aritmetično
2. Primeri pretvarjanja nalog iz aritmetične v algebrsko – 1. triletje
3. Predstavitev vsebin na RS, ki omogočajo razvoj algebraičnega mišljenja
4. Tuji izsledki o razvoju algebraičnega mišljenja + primeri raziskav
5. Problem „bazen“: od 1. razreda do fakultete
6. Vpogled v učni načrt in rezultate raziskave TIMSS

Primerjava aritmetika - algebra

Tradicionalno:

- Aritmetika: računanje s števili, avtomatiziranje osnovnih aritmetičnih dejstev, razviti računske algoritme, ki bodo olajšali računanje.
- Algebra: abstraktnejša matematična disciplina - učenje pravil za manipuliranje z matematičnimi simboli.

Preusmeritev v zadnjih 20 letih:

- obdobje elektronike: sposobnost spretnega računanja z velikimi števili ni več v ospredju.
- Reduciranje pomena standardnih računskih algoritmov: proceduralno znanje.
- Preusmeritev pozornosti na povezovanju aritmetike z algebro: konceptualno in problemska znanja.

Kako opisati algebro?

- **Je posplošitev aritmetike**: medtem ko se aritmetika osredinja na konkretne izračune (proceduro), se algebra nanaša na odkrivanje vzorcev, relacij, pravil na številih in konkretnih aritmetičnih računih (problemsko znanje).

Odkrivanje relacij, vzorcev, pravil = iskanje posplošitev.

Kaj je algebraično mišljenje?

- Swafford in Langrall (2000): sposobnost da operiramo z neznano količino kot da bi bila količina znana – algebraično mišljenje; situacije z znanimi količinami - aritmetično mišljenje
- Driscoll (1999): algebraično mišljenje je sposobnost predstavitve kvantitativnih situacij na tak način, da postanejo vidni odnosi med spremenljivkami.
- Kieran (1996): uporaba katerekoli vrste predstavitev, ki dane količine poveže v relacijo.

Kako spremeniti aritmetično nalogo v algebrsko nalogo?

1. primer:

Izračunaj:

10 + 4= ___

10 + 2 =___

10 + 7 =___

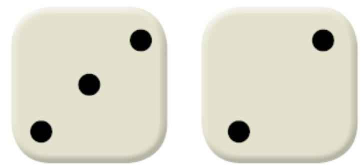
10 + 5 =___

Goli izračuni: aritmetika

Preusmeritev pozornosti na pravilo pri računanju: oblikovanje posplošitve za ta tip računov

začetna algebra

- 2. primer: Tombola malo drugače



V čem se razlikujeta dejavnosti za primer 2?

1.

- Poudarek je na izračunu posameznih primerov – gola aritmetika
- vzpostavitev relacije med dvema številoma znotraj posameznega para (aritmetično mišljenje – razmišljanje o posameznem primeru)

2.

- sistematično urejanje računov – sklepanje o relacijah med različnimi razčlenitvami danega števila.
- Iskanje relacije med različnimi pari števil (algebraično mišljenje – razmišljanje o relacijah)

Katere vsebine na RS so primerne za uvajanje v algebro/algebraično mišljenje?

- Enačbe
- Vzorci
- Zaporedja

V zadnjih 20 letih raziskave v smeri raziskovanja vloge vzorcev in zaporedji kot načina uvajanja učencev v začetno algebro: Ferrara in Sinclair (2016), Carraher et al. (2008) Moss in Baatty (2010), Radford (2008, 2010), Rivera (2011).

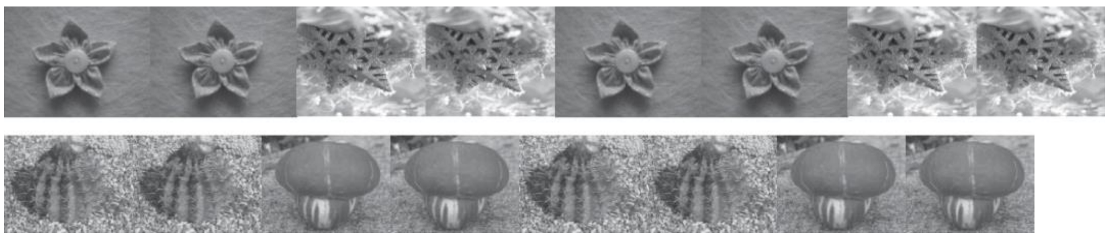
zaporedja in vzorci sta vsebini, ki vključujeta predvidevanje, napovedovanje, delo s spremenljivkami in funkcijami: oblikovanje posplošitev

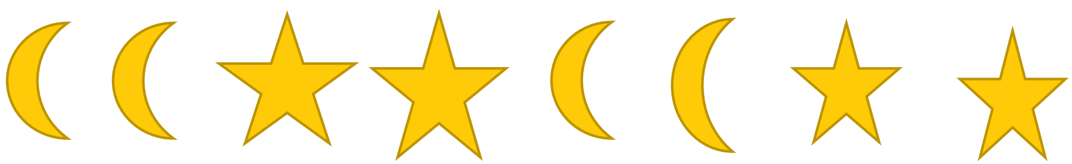
Vzorci

- Tipi nalog pri prepoznavanju vzorcev:
  - Ponovitev vzorca
  - Nadaljevanje vzorca
  - Dopolnjevanje vzorca
  - Izdelava enakega vzorca z drugačnim ponazorilom

Enak vzorec – drugačno ponazorilo

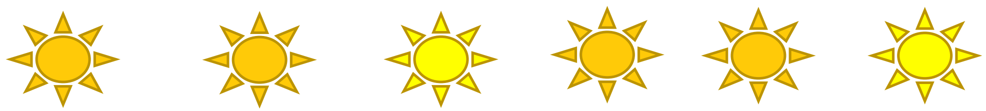
1. Učenci spoznajo, da se isti vzorec lahko pojavi v številnih različnih oblikah





Neodvisnost strukture od uporabljenega materiala

2. Učenci spoznajo, da ima vzorec



enako pravilo kot glasovni vzorec

ko-ko-dak-ko-ko-dak

aabaab

.

Posplošitev: zelo različne situacije imajo lahko enake matematične lastnosti

- Raziskava med predšolskimi otroki (5 – 6 letniki) (Tirosh idr., 2015):
    - Ali so predšolski otroci sposobni prepoznati podobno /različno strukturo dveh vzorcev?
    - Kako opišejo/izrazijo podobnost /različnost struktur?

Lastnosti primerjanih vzorcev	1. vzorec	2. vzorec
Različna struktura in enak tip ponazorila		
Enaka struktura in enak tip ponazorila – različne barve		
Enaka struktura in različen tip ponazorila		

- Ravni prepoznavanja strukture vzorcev:
  - Raven 0: brez sklicevanja na enoto vzorca
  - Raven 1: opis posameznih podobnosti/razlik (prirejanje, kako se bo vzorec nadaljeval)
  - Raven 2: otrok prepozna ponavljajočo se enoto

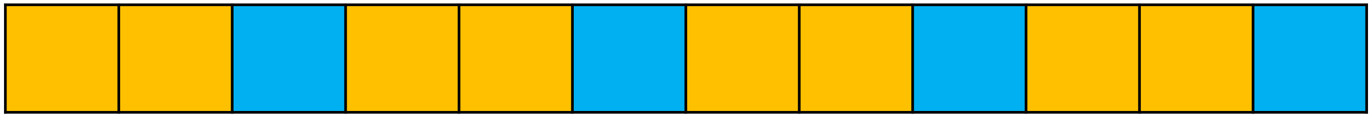
Primer:

“V čem sta si podobna?”

- Raven 0: v obeh je rdeča.
- Raven 1: tu sta dve rdeči, tu sta dve rumeni. Tu je ena modra, tu je ena rdeča.
- Raven 2: vsakič sta dve in ena.

	Raven 0	Raven 1	Raven 2
Primer 1	28	13	17
Primer 2	29	19	10
Primer 3	44	5	9

Vloga učitelja: postavljanje vprašanj



- Aritmetična vprašanja

1. Koliko kock je v 4 ponovitvah enote?
   - poštevanka
2. Kakšne barve je 11. kocka?
   - deljenje z ostankom

- Algebraična vprašanja

Kakšne barve pa bi bila 50. kocka?

- problemske veščine: predvidevanje, sklepanje, utemeljevanje

Zakaj so vzorci uvod v algebro?

Algebraično mišljenje → iskanje posplošitev

Posplošitve pri vzorcih:

- odkritje relacije "povsod je enako"
- Razvijanje problemskih veščin: predvidevanje, utemeljevanje

Zaporedja

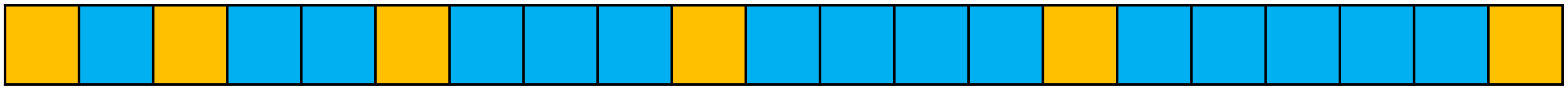
Radford (2012):

Ključni vidik posploševanja: posameznikova zmožnost, da opazi podobnosti in razlike:

1. skupne značilnosti na posameznih členih zaporedja - aritmetična posplošitev

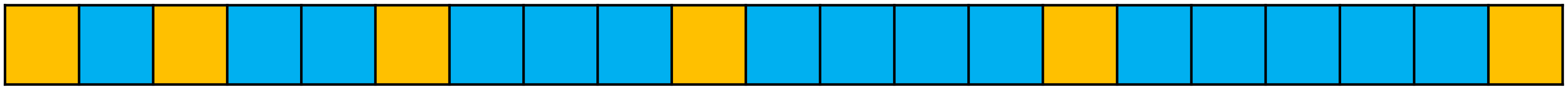
2. oblikovanje splošnega pravila – algebraična posplošitev

Primer



Aritmetično vpr.

- Koliko kock je v 2(3, 4, 5, 6) členih skupaj? 2 + 3 = 5

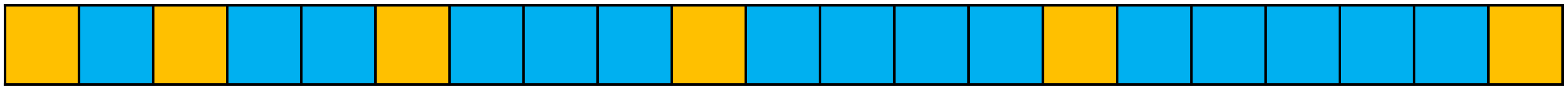


Aritmetično vpr.

- Koliko kock je v 2(3, 4, 5, 6 členih) skupaj? 2 + 3 = 5

Prehod na algebro

- 4. člen ima eno kocko več kot predhodni člen



Aritmetično vpr.

- Koliko kock je v 2(3, 4, 5, 6 členih) skupaj? 2 + 3 = 5

Prehod na algebro

- 4. člen ima eno kocko več kot predhodni člen

Algebraično vpr.

- Koliko pa bi bilo kock v 25. členu?

Načini oblikovanja posplošitve
(po Radfordu)

Rekurzivno

- Relacije znotraj zaporedja: podobnosti lahko iščemo na lokalni ravni: med posameznimi členi zaporedja

Funkcijsko

- Relacije na celi množici podatkov – iskanje relacije med dvema množicama spremenljivk in ne le med dvema členoma : globalno - oblikovanje splošnega pravila

Načini oblikovanja posplošitve
(po Radfordu)

Rekurzivno

opazujemo dva sosednja člena in iščemo enakosti, podobnosti:

4. člen ima eno kocko več kot predhodni člen

Funkcijsko (relacijsko)

iščemo relacijo med spremenljivkama (odvisna in neodvisna):

Splošno pravilo:

Število kock v n-tem členu:

$a_{(n)} = n + 1$

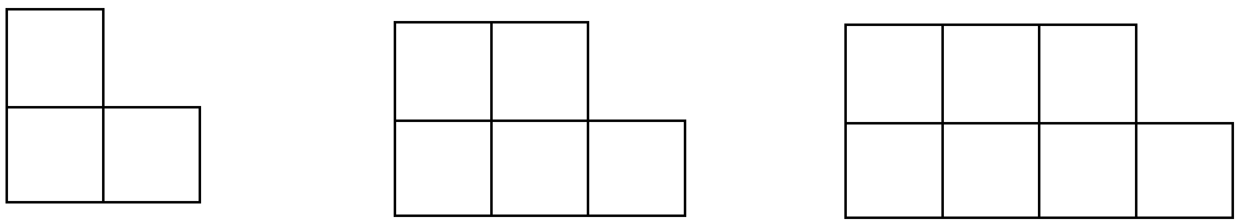
Povzetki raziskav pri učencih na razredni stopnji

- Učenci pogosteje uporabljajo rekurzivne strategije za opis posplošitve kot pa direkten funkcijski zapis relacije med obema spremenljivkama (Radford, Callaher et al.)

- Moss (delo z učenci 2. in 4. razreda): rekurzivne strategije omogočajo učencu da napove, kaj se bo zgodilo v naslednjem koraku, ne spodbujajo pa k iskanju globalnih relacij med dvema množicama podatkov in oblikovanju splošnega pravila

- Radford (2012) : prav zavedanje odnosa na strukturni ravni – funkcijski odnos je po njegovem glavna značilnost algebraičnega mišljenja

Radford (2012) – učenci 2. razreda



Opiši, kako bi ugotovil število kvadratkov za katerokoli figuro v tem zaporedju.

Ugotovitve

Uporaba različnih izraznih načine brez uporabe formalnih matematičnih zapisov v obliki formule:

- Numerično: implicitna raba spremenljivke: 12 plus 12 plus 1, ali 50 plus 50 plus 1 - začetna raven algebraičnega mišljenja
- Parametrično: eksplicitna raba spremenljivke: število plus število plus 1 – po Radfordu učenec s takim opisom preseže povezavo s konkretno geometrijsko konstrukcijo

Carraher et al. (2008)

Pomen izbora konkretnega primera:

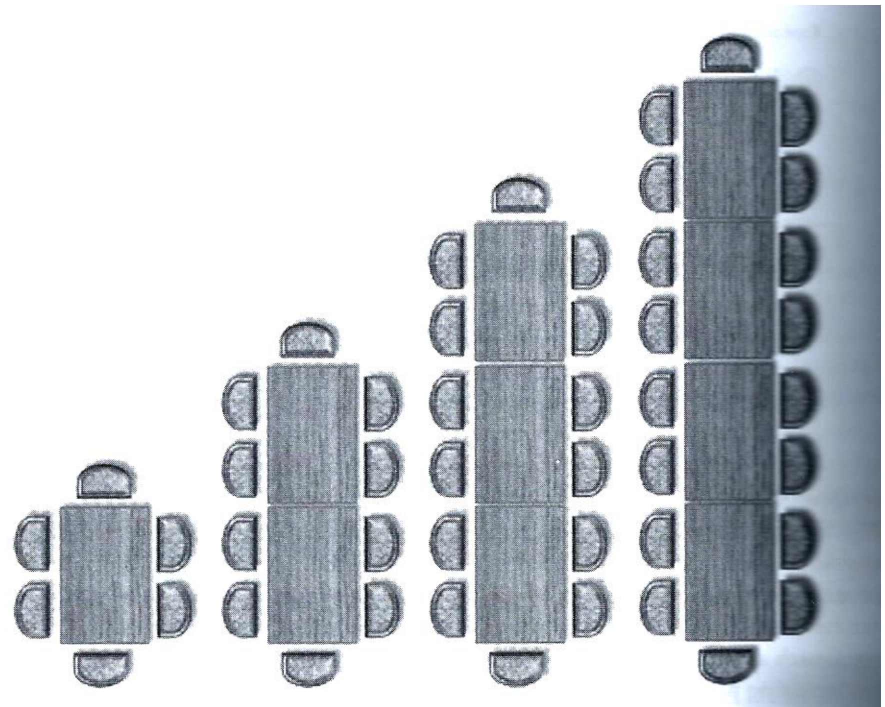
Geometrijske postavitve/ grafične reprezentacije kot izhodišče za izpeljavo posplošitev.

Primer: Problem z mizami in stoli

Šest ljudi sedi za pravokotno mizo: dva ob vsakem daljšem robu, in en ob vsakem krajšem robu mize. Mize združujemo linearno s krajšim robom mize. Koliko ljudi lahko sedi za 2 mizama, 3 (4, 5, 15, n) mizami?

- Kako ga ponazoriti/predstaviti?

Grafična reprezentacija



Prehod na simbolno reprezentacijo problema

Število miz (m)/zap. Korak	Število stolov (s)
1	6

Prehod na simbolno reprezentacijo problema

Število miz (m)/zap. Korak	Število stolov (s)
1	6
2	10

Prehod na simbolno reprezentacijo problema

Število miz (m)/zap. Korak	Število stolov (s)
1	6
2	10
3	14

Prehod na simbolno reprezentacijo problema

Število miz (m)/zap. Korak	Število stolov (s)
1	6
2	10
3	14
4	18
5	

Prehod na simbolno reprezentacijo problema

Število miz (m)/zap. Korak	Število stolov (s)
1	6
2	10
3	14
4	18
5	22

Oblikovanje posplošitve

Koliko ljudi pa bi lahko sedelo v vrsti 100-ih miz?

Število miz (m)/zap. korak	Število stolov (s)
1	6
2	10
3	14
4	18
5	22

Rekurzivno: sklepanje iz koraka v korak – izhajamo iz prejšnje vrednosti
(na vsakem koraku prištejem 4)

Splošno pravilo: iskanje relacije med spremenljivkama:

- Kateri sta spremenljivki?
- Katera je odvisna in katera neodvisna?

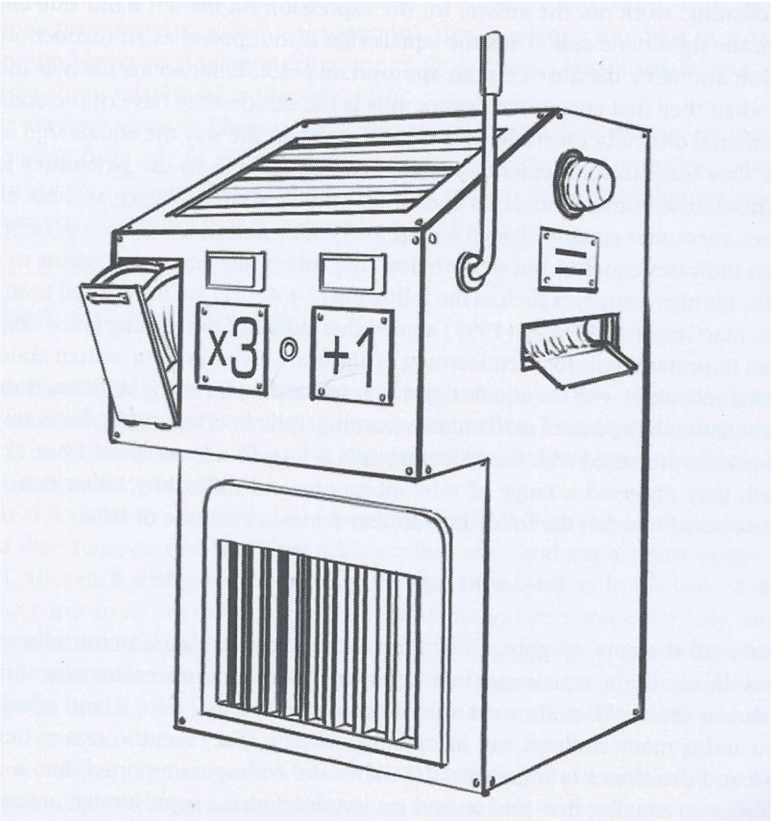
$$s = m \times 4 + 2$$

Povzemimo

Zaporedja

Relacije

funkcija



Primer iz prakse: toaletni papir (Ferrara, Sinclair, 2016) – 3. razred

- številsko zaporedje

- Dejavnost s toaletnim papirjem

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2	4	6	8	10

Kolikšna vrednost ob napisana na 12. lističu?

- ‘Rekurzivne utemeljitve‘: štejejo po 2.

- Učiteljeve usmeritve:

  Poskusite določiti vrednost brez štetja.

  Poiščite najhitrejši možni način, da bi prišli do rešitve.

- ‘Funkcijske utemeljitve‘: Učenci postopno začnejo izražati pravilo z ubeseditvijo pravila: število podvojim

- Kolikšna vrednost bo zapisana na 12. listku?
  - 1. strategija: postopno - štejem po 2
    - rekurzivno
  - 2. strategija: direktno z računsko operacijo
    - Ralacija med spremenljivkama: funkcija

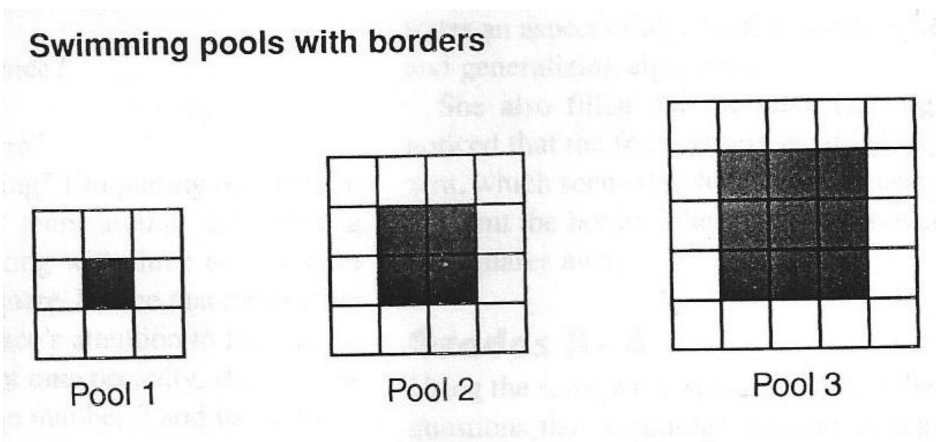
Povzetek

Vloga toaletnega papirja:

- opis pozicije določenega števila v zaporedju – lažje opaziti povezavo med dvema množicama številčnih podatkov (pozicija števila in vrednost števila na lističu).
- Premik od rekurzivnega k funkcijskemu opisu relacije.

Problem „Bazen“ – analiza primera od 1. razreda do fakultete

- Vrtnar Miha izdeluje plavalne bazene. Vsak bazen ima kvadratni plavalni del bazena. Miha dno bazena pokrije z modrimi kvadratnimi ploščicami, okrog bazena pa napravi tlakovano pot iz belih ploščic.

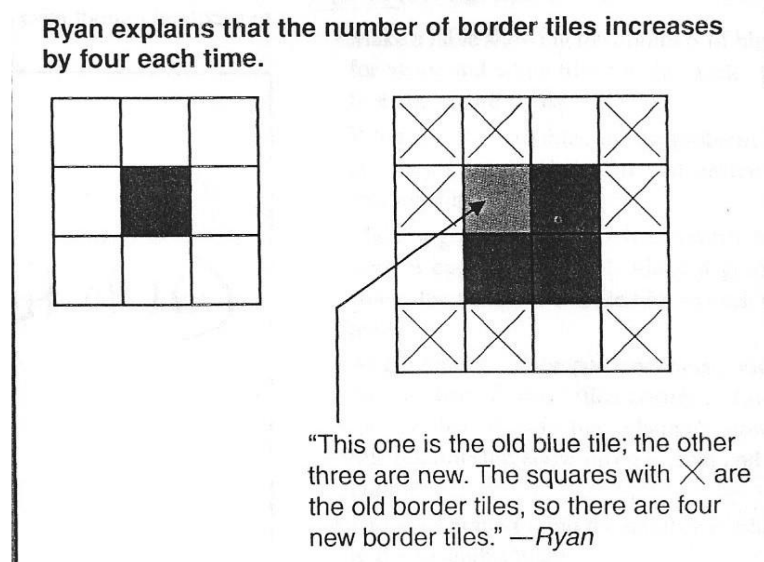


Postopno stopnjevanje vprašanj

- Štetje modrih, belih tlakovcev.
- Ugotavljanje števila modrih tlakovcev za naslednji primer.
- Kaj pa, če bi imeli 32 belih tlakovcev, koliko bi bilo modrih v sredini?
- Ali lahko narediš kvadrat iz 49 modrih ploščic?
- Ali lahko narediš kvadrat z 12 modrimi ploščicami? Zakaj da, zakaj ne?
- Kako narašča število belih tlakovcev?
- Kateri spremenljivki se pojavljata v nalogi? Kako sta povezani?
- Nariši graf in s pomočjo grafa poišči število belih tlakovcev za naslednji primer.

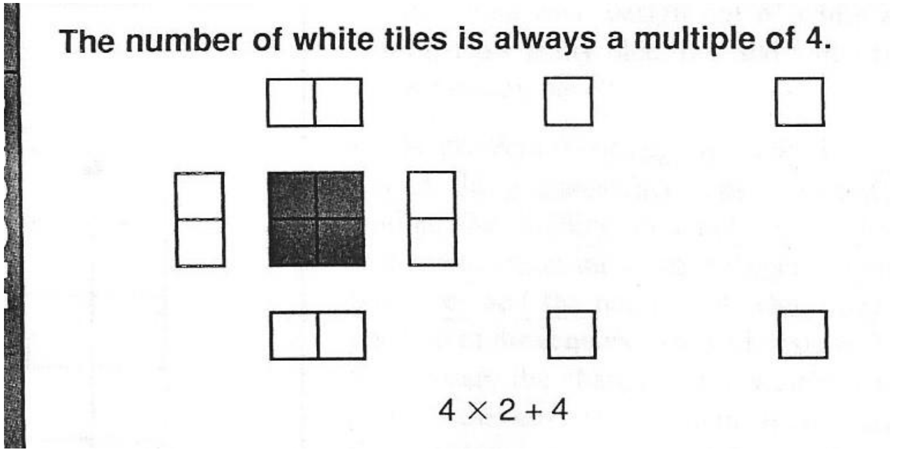
Kje je prisotno algebraično mišljenje?

1. Iskanje pravila, pri katerih številih lahko dobimo kvadratno obliko ribnika.
2. Iskanje pravila za število belih tlakovcev:
   - Število belih tlakovcev narašča za 4 – zakaj?



Kje je prisotno algebraično mišljenje?

- Število belih tlakovcev dobimo tako, da število modrih tlakovcev na eni stranici pomnožimo s 4 in prištejemo 4 za vse 4 vogalne tlakovce.
- Opazimo, da bo število belih tlakovcev vedno večkratnik števila 4.

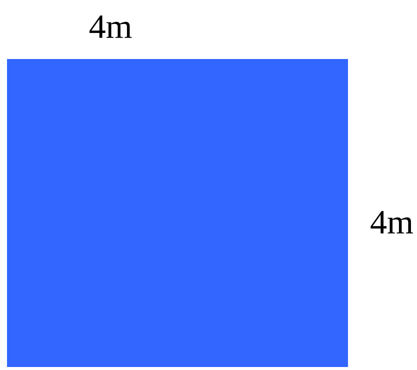


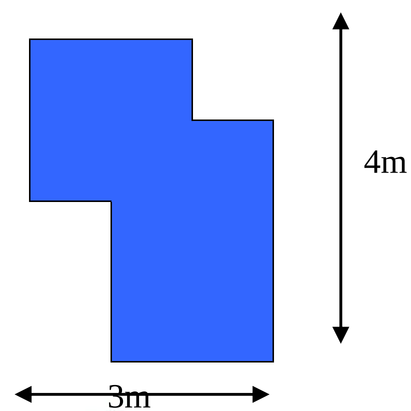
Problem Ribnik - raziskava med študenti RP na PEF Ljubljana

Problem

Miha dela v vrtnarskem centru, kjer prodajajo ribnike različnih oblik. Njegova naloga, je da strankam svetuje, koliko kvadratnih tlakovcev potrebujejo, če želijo obrobiti svoj ribnik s tlakovano potko.

a. Koliko plošč za tlakovanje (1m x 1m) potrebujejo za obrobo ribnika dimenzije 4m x 4m (slika 1)?
b. Oblikujte pravilo, ki naj ga Miha uporabi za izračun števila tlakovcev za poljuben ribnik kvadratne oblike?
c. Kaj pa, če ribnik nima pravilne oblike (slika 2)? Oblikujte pravilo in razložite zakaj deluje.
d. Kaj pa, če bi imel vaš ribnik poljubno oglato obliko, ki jo lahko skiciramo na karo mreži?





Različni tipi posplošitve

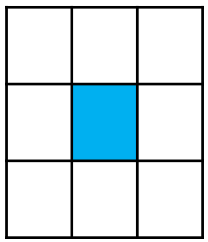
Študentka A

4x4	20 =	$\boxed{4}$ x 5
5x5	24 =	$\boxed{4}$ x 6
6x6	28 =	$\boxed{4}$ x 7
7x7	32 =	$\boxed{4}$ x 8

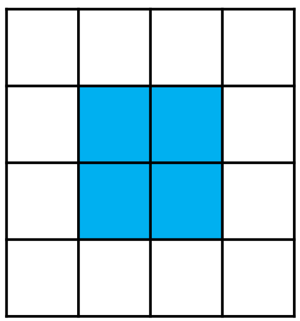
$$4\,(a + 1)$$

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT
EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

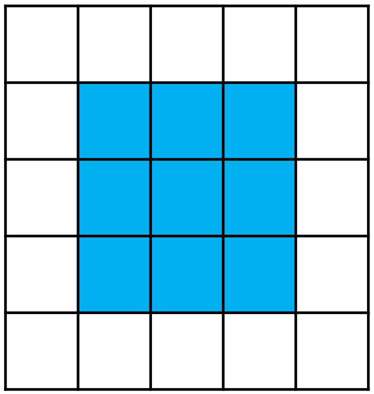
Študentka C



8 ploščic



12 ploščic



16 ploščic

Študentka C

1x1: 8

+4

2x2: 12

+4

3x3: 16

+4

4x4: 20

+4

5x5: 24

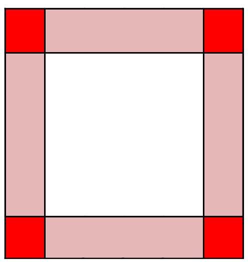
...

10x10: 44

Ker potrebuješ eno novo ploščo na vsakem vogalu kvadrata.

Študentka B

4 x 4:



4 x 4 + 4

n x n: 4 x n + 4

Posplošitve v matematiki - tipi posplošitev (Krygowska 1979, in Ciosek 2012)

- **Indukcija**: na osnovi odkritih pravil za za f(1), f(2), f(3) … predvidimo splošno pravilo f(n) za poljubno naravno število n.

  Rekurzivne posplošitve: podobno posploševanju z indukcijo, le da pravilo za f(2) sledi iz pravila za f(1) , f(3) iz f(2),…, in splošno pravilo je podano v rekurzivni obliki.

- **Poenotenje specifičnih primerov**: trditve/pravila/izreke, ki veljajo za izbrane primere lahko nadomestimo z enim splošnim izrekom/pravilom, ki vključuje vse posebne primere, npr.: Pitagorov izrek, formule za ostrokotne in topokotne trikotnike lahko posplošimo s kosinusno formulo.
- **Posploševanje sklepanja**: način razmišljanja, ki smo ga uporabili na posameznem primeru uporabimo direktno pri oblikovanju splošnejšega pravila (npr. ploščina pravokotnika, ploščina kvadrata).

Vzorci in zaporedja v učnem načrtu (2011)

- Sistematično, po celotni vertikali (od 1. do 9. razreda) sta dodani vsebini vzorcev in zaporedij kot didaktični pristop za vpeljavo in razumevanje algebrskih struktur.
- Kako jih vpeljujemo?
  - oblikovanje in prepoznavanje pravil v vzorcih (npr.: geometrijski, slikovni, glasovni vzorci)
  - oblikovanje številskih zaporedij (prepoznavanje in oblikovanje pravil v številskih zaporedjih).

Predalgebrsko razmišljanje

- Nadgradnja učne vsebine:
  - Izpeljevanje posplošitev

Algebrsko razmišljanje

Operativni cilji za mat. vsebino “vzorci”

1. triletje

- oblikujejo slikovne in geometrijske vzorce,
- prepoznajo pravilo v slikovnem in geometrijskem vzorcu in vzorec nadaljujejo.

2. triletje

- opazujejo vzorec, prepoznajo pravilo v vzorcu in ga nadaljujejo (4.r, 5. r.),
- oblikujejo slikovne in geometrijske vzorce (poljubno ali po pravilu) (5.r)
- prepoznajo pravilo v številskem zaporedju, ga nadaljujejo in napovejo (npr. 20. člen zaporedja) (6. r)

3. triletje

- opazujejo vzorec in ugotovijo pravilo (7.r)
- oblikujejo ali nadaljujejo dano zaporedje v množici celih števil (8.r)
- opazujejo vzorce, ugotovijo pravilo in ga zapišejo z algebrskim izrazom (8.r)
- opazujejo in prepoznajo pravilo v številskem zaporedju in zaporedje nadaljujejo (8., 9.)
- prepoznajo pravilo v zaporedju, poiščejo posplošitev in zapišejo algebrski izraz (8., 9.)

Vzorci in zaporedja v raziskavi TIMSS 2011 – 4. razred

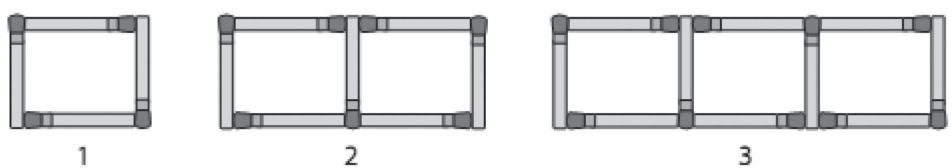
Primer 1: nadaljevanje zaporedja (Vir: TIMSS 2011, str. 24)

Miha mora iz vžigalic sestaviti vzorec iz likov od 1 do 4.

Liki 1, 2 in 3 so prikazani spodaj.

Za lik 1 potrebuje štiri vžigalice, za lik 2 potrebuje sedem vžigalic, za lik 3 pa deset vžigalic.

Vsakič, ko sestavi naslednji lik v vzorcu, uporabi isto pravilo.



Koliko vžigalic bo potreboval za lik 4?

Odgovor: _______________

Rezultati za primer 1:

Kognitivno področje: uporaba znanja

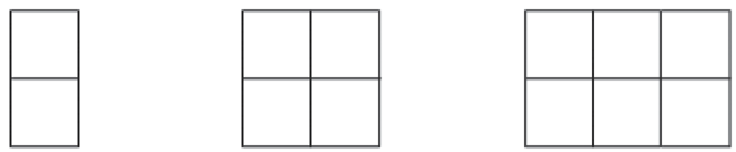
Mejnik znanja: visoka raven znanja

Vsebinsko področje in poglavje: števila, vzorci in relacije

Rezultati v Sloveniji	Odstotki pravilnih odgovorov	Odstotki pravilnih odgovorov med deklicami	Odstotki pravilnih odgovorov med dečki
	65,5	64,2	66,7

Primer 2: Induktivni sklep (Vir: TIMSS 2011, str. 64)

Boštjan je zlagal kvadratke na naslednji način.



1. lik 2. lik 3. lik

A. Nariši 5. lik.

B. Koliko kvadratkov bi potreboval Boštjan za 16. lik ?

Odgovor: _______________

Rezultati za primer A:

Kognitivno področje: uporaba znanja

Mejnik znanja: srednja raven znanja

Vsebinsko področje in poglavje: števila, vzorci in relacije

Rezultati v Sloveniji	Leto	Odstotki pravilnih odgovorov	Odstotki pravilnih odgovorov med deklicami	Odstotki pravilnih odgovorov med dečki
	2007	63,9	64,3	63,4
	2011	60,3	60,9	59,6

Rezultati za primer B:

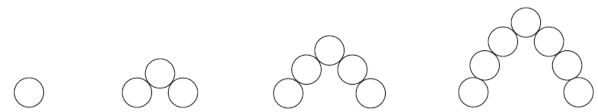
Kognitivno področje: sklepanje

Mejnik znanja: visoka raven znanja

Vsebinsko področje in poglavje: števila, vzorci in relacije

Rezultati v Sloveniji	Leto	Odstotki pravilnih odgovorov	Odstotki pravilnih odgovorov med deklicami	Odstotki pravilnih odgovorov med dečki
	2007	48,1	46,9	49,3
	2011	46,5	49,3	43,7

Primer 3: Na poti do funkcijskega opisa zaporedja (Vir: TIMSS 2011, str. 79)



1. slika 2. slika 3. slika 4. slika

Zgoraj je prikazano zaporedje štirih slik.

A. Dopolni spodnjo tabelo za 4. sliko.

Slika	Število krožcev
1	1
2	3
3	5
4	

B. Če bi zaporedje nadaljevali s 5. sliko, iz koliko krožcev bi bila sestavljena 5. slika?

Odgovor: _______________

C. Če bi zaporedje slik še nadaljevali, iz koliko krožcev bi bila sestavljena 10. slika? (Ne riši slik!)

Rezultati za primer 3 B:

Kognitivno področje: uporaba znanja

Mejnik znanja: srednja raven znanja

Vsebinsko področje in poglavje: števila, vzorci in relacije

Rezultati v Sloveniji	Leto	Odstotki pravilnih odgovorov	Odstotki pravilnih odgovorov med deklicami	Odstotki pravilnih odgovorov med dečki
	2007	72,5	72,8	72,1
	2011	79,0	81,6	76,6

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT

EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Rezultati za primer 3 C:

Kognitivno področje: sklepanje

Mejnik znanja: visoka raven znanja

Vsebinsko področje in poglavje: števila, vzorci in relacije

Rezultati v Sloveniji	Leto	Odstotki pravilnih odgovorov	Odstotki pravilnih odgovorov med deklicami	Odstotki pravilnih odgovorov med dečki
	2007	39,1	41,7	36,6
	2011	47,4	55,2	40,5

Primer 4: Naloga s številskimi zaporedji (Vir: TIMSS 2011, str. 76)

Če bi nadaljevali zaporedje števil 3, 6, 9, 12, katero od naslednjih števil bi bilo še v tem zaporedju?

- A 26
- B 27
- C 28
- D 29

Rezultati za primer 4:

Kognitivno področje: uporaba znanja

Mejnik znanja: visoka raven znanja

Vsebinsko področje in poglavje: števila, vzorci in relacije

Rezultati v Sloveniji	Odstotki pravilnih odgovorov	Odstotki pravilnih odgovorov med deklicami	Odstotki pravilnih odgovorov med dečki
	78,6	81,0	76,5

Literatura

- Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika (2011). Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo
- Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi. Matematika [Elektronski vir] (2013). M. Suban, S. Kmetič (ur.).Ljubljana : Zavod RS za šolstvo.
- Matematične naloge raziskave TIMSS : mednarodna raziskava trendov znanja matematike in naravoslovja (2011). B. Japelj Pavešić (ur.). Ljubljana : Pedagoški inštitut.
- Wright, J. W., Ellemor- Collins, D., Tabor, P. D. (2012). Developing number knowledge. London: SAGE publications Ltd
- Tirosh, D., Tsamir, D., Levenson, E., Tabach, M. & Barkai, R. (2015). Kindergarten children's recognition of pattern structure. V: J. Novotna, H. Moroava (ur.).Proceedings, developing mathematical language and reasoning. Praga, 2015.
- Radford, L. (2001). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42,* 237–268.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5(1)*, 37-70.
- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. PNA, 6(4), 117 – 133.

Literatura

- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40*, 83-96. Carraher, D. W., Martinez, M., Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. ZDM, 40 (1), 3 – 22.
- Hodnik Čadež, T, Manfreda Kolar, V. (2015). Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. Educational studies in mathematics, 89/2, str. 283-306.
- Ciosek, M. (2012). Generalization in the process of defining a concept and exploring it by students. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.) *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 38-56). Rzeszow: University of Rzeszow.
- Ferrara, F. in, Sinclair, N. (2016) An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. Educational studies in mathematics.
- Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 89-112.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33–56). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.
- Moss, J. & Beatty, R. (2010). Knowledge Building and Mathematics: Shifting the Responsibility for Knowledge Advancement and Engagement. Canadian Journal of Learning and Technology, 36(1).http://www.cjlt.ca/index.php/cjlt/article/view/575.