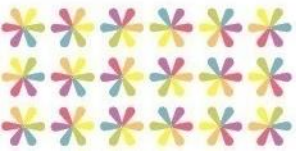


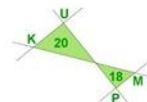
OD OPISA DO DEFINICIJE GEOMETRIJSKEGA POJMA IN SCIENTIX

SILVA KMETIČ, MELITA GORŠE PIHLER

Zavod Republike Slovenije za šolstvo



4. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike KUPM 2018



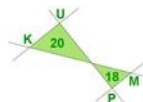
REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



Namen delavnice

V vlogi učencev (7. razreda) bomo preizkusili aktivnosti na izobraževalnem lističu *Primerjajmo in razvrstimo štirikotnike*.

Razpravljali bomo o uporabi lističa v razredu in pomenu postopnega razvoja geometrijskega mišljenja.



Potrebni kriteriji za oblikovanje definicij

(Van Dormolen, Zaslavsky, 2003).

Hierarhičnost

Nov pojem opišemo kot poseben primer splošnejšega pojma, npr. kvadrat je štirikotnik s štirimi skladnimi daljicami in enim pravim kotom (zahteval že Aristotel).

Eksistenca

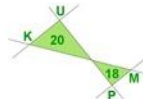
Dokazati moramo obstoj vsaj enega elementa (zahteval že Aristotel).

Ekvivalenca

Če podamo različni definiciji, moramo dokazati ekvivalenco definicij.

Vključenost

Je del deduktivnega sistema.



Želeni kriteriji za oblikovanje definicij

(Van Dormolen, Zaslavsky, 2003).

Minimalnost

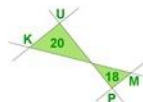
Minimalno število lastnosti, npr. kvadrat je enakostranični štirikotnik z enim pravim kotom; pravokotnik je štirikotnik s tremi pravimi koti.

Eleganca

Če imamo na voljo dve ekvivalentni definiciji, izberemo tisto z manj besedami in manj simboli, skratka tisto, ki je „lepša“.

Izrojenost

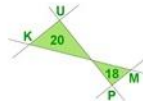
Definicija vključuje tudi izrojene primere, ki jih morda želimo izključiti.



Ravni geometrijskega mišljenja

(Van Hiele)

- Vizualna raven
- Opisna raven
- Raven povezovanja oz. neformalnega sklepanja
- Raven formalnega sklepanja
- Raven rigoroznega sklepanja



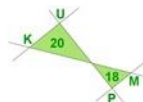
Vizualna raven

Prepoznavanje pojmov (oblik, likov, višin ...), modelov pojma po videzu (čutila). Posamezne lastnosti pojmov niso identificirane.

(Kmetič, Miholič, Zobec, 2014)

Primeri:

- Med modeli (fizičnimi, izrezanimi, narisanimi v poljubni legi) likov identificirajo kvadrate, pravokotnike ...
- Pravokotnike in kvadrate povezujejo intuitivno: za pravokotnik rečejo, da je širši od kvadrata; kvadrat je poseben pravokotnik z enakimi stranicami ...
- Like razvrščajo glede na to, ali so si med seboj podobni po izgledu.
- Kvadrat identificirajo glede na njegov izgled, ne pa glede na to, da ima vse stranice enako dolge in vse kote prave.
- ...



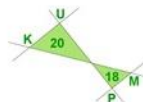
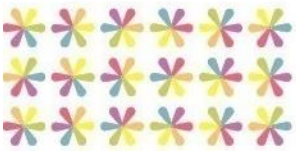
Opisna raven

Analiza posameznih lastnosti pojma oz. modela, učenje terminologije, brez povezav med pojmi ali njihovimi lastnostmi.

(Kmetič, Miholič, Zobec, 2014)

Primeri:

- Uporabljajo ustrezno geometrijsko besedišče.
- Povedo, v čem se pravokotnik in kvadrat razlikujeta.
- Sami oblikujejo kriterij, po katerem razvrščajo štirikotnike.
- Glede na zapisane lastnosti narišejo lik. Npr. ima štiri enako dolge stranice; ima štiri stranice, ki so enako dolge, in ni kvadrat; ima štiri enako dolge stranice in en pravi kot.
- Ob razvrščanju likov na deltoide (pravokotnike ...) in like, ki niso deltoidi (pravokotniki ...), odkrijejo in verbalizirajo lastnosti, ki so značilne za deltoide (pravokotnike ...).
- ...



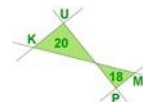
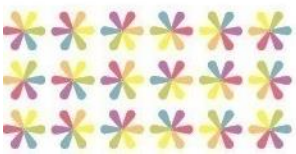
Raven povezovanja oz. neformalnega sklepanja

Primerjanje, razvrščanje in povezovanje lastnosti pojmov v krajših zaporedjih sklepov. Ugotavljanje inkluzije.

(Kmetič, Miholič, Zobec, 2014)

Primeri:

- Izberejo lastnosti, ki karakterizirajo skupino likov, ter z risanjem in konstruiranjem testirajo, če so te lastnosti zadostne za opis likov.
- Pri opisovanju npr. kvadrata izberejo čim manj lastnosti, ki opisujejo kvadrat, vendar se po le-teh da prepoznati, da gre za kvadrat.
- Pravokotnik prepoznajo kot paralelogram in razložijo, da ima pravokotnik vse značilnosti paralelograma, paralelogram pa nima vseh značilnosti pravokotnika.
- Na podlagi lastnosti, ki karakterizirajo deltoide in kvadrate razložijo, zakaj so vsi kvadrati deltoidi in obratno, zakaj vsi deltoidi niso kvadrati.
- ...



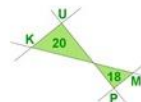
Raven formalnega sklepanja

Pojmi niso več vezani na modele, zaporedja sklepov se daljšajo.

(Kmetič, Miholič, Zobec, 2014)

Primeri:

- Identificirajo zadostne lastnosti za določitev lika ter izpeljejo ostale lastnosti.
- Oblikujejo definicijo deltoida in z njo razložijo, zakaj so določeni liki deltoidi oz. niso deltoidi.
- Določijo dva seznama lastnosti, ki sta enakovredna za določitev lika.
- ...



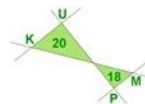
Raven rigoroznega sklepanja

Razumevanje geometrije na osnovi aksiomov, definicij, izrekov ...



(Kmetič, Miholič, Zobec, 2014)

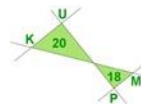
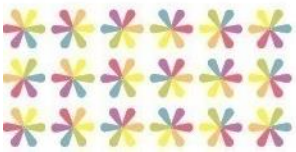
Opomba:

- To raven lahko dosežejo učenci starosti približno od 15 let naprej. Formalno sklepanje se lahko prične razvijati pri nekaterih učencih še prej. Nekateri otroci pa ostanejo na ravni konkretnih operacij neodvisno od starosti (Piaget).





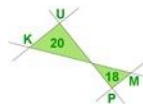
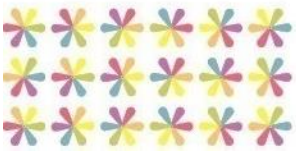
Izdelek učenca 7. razreda

		
Lik	KVADRAT	PRAVOKOTNIK
Enakosti	obaj imata 4 stranice, 4 oglišča, imata 4 prave kote in 2 para vzporednih stranic	
Razlike	kvadrat ima vse stranice isto dolge	




Izdelek učenca 7. razreda


PRIMERJAM KVADRAT IN PRAVOKOTNIK		
		
Lik	KVADRAT	PRAVOKOTNIK
Enakosti	<p>Imata same prave kote. Oba sta lika.</p>	
Razlike	<p>Ima 4 skladne stranice.</p>	<p>Ima dva para skladnih stranic.</p>




Dejavnost za učence z uporabo izobraževalnega lističa Scientix




SCIENTIX
The community for science education in Europe




Zvezd Republike Slovenije za šolstvo



NA-MA



NA-MA DEJAVNOSTI



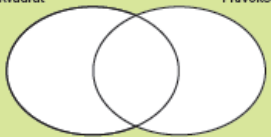
NA-MA DEJAVNOSTI

PRIMERJAJMO IN RAZVRSTIMO ŠTIRIKOTNIKE

Štirikotnike primerjamo glede na njihove lastnosti. Pri primerjanju lastnosti štirikotnikov nam je lahko v pomoč primerjalna shema (slika 1) ali Venov diagram (slika 2).

Enakosti		
Razlike		

Kvadrat



Pravokotnik

Slika 1: Primerjalna shema Slika 2: Venov diagram

Definicija matematičnega pojma ne vsebuje vseh lastnosti pojma. Pojem lahko definiramo tako, da zapišemo najbližji »rojstni pojem« in navedemo lastnosti, ki so nujne in med seboj neodvisne. Glede na lastnosti, ki karakterizirajo skupino likov, razvrščamo štirikotnike.

Primer

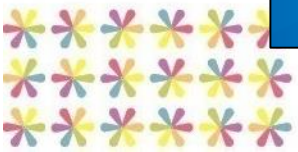
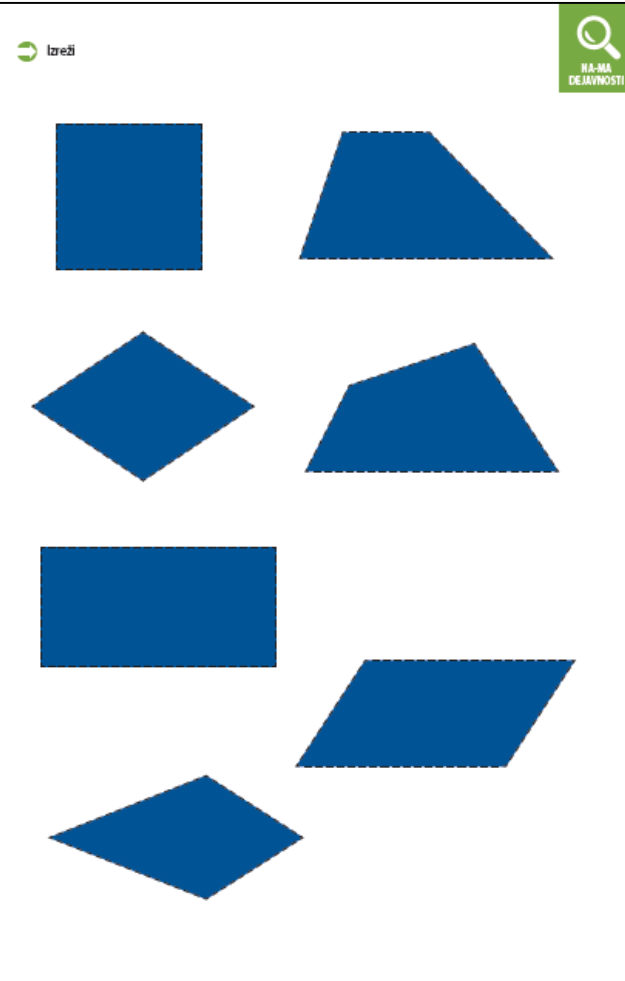
Lastnosti kvadrata so: nasprotni stranici sta vzporedni, vse stranice so skladne, vsi notranji koti so pravi, diagonali sta skladni, diagonali se sekata pravokotno ...

Najbližja »rojstna pojma« za kvadrat sta pravokotnik in romb. Tako lahko kvadrat definiramo »Kvadrat je pravokotnik, ki ima vse stranice skladne« ali »Kvadrat je romb, ki ima vse notranje kote prave« ...

Aktivnost primerjanja in razvrščanja štirikotnikov nam pomaga preiti iz opisne ravni na raven neformalnega ali celo formalnega sklepanja (tvorjenje matematičnih definicij je primer formalnega sklepanja).

Izobraževalni lističi Scientix NA-MA 2

<http://url.sio.si/nN7>



PRIMERJAJMO IN RAZVRSTIMO ŠTIRIKOTNIKE

Primerjaj štirikotnike

- Modela kvadrata in pravokotnika postavi na ustrezni mesti v primerjalni shemi. Primerjaj lika. Zapiši enake lastnosti in lastnosti, po katerih se kvadrat in pravokotnik razlikujeta.

	Lik 1	Lik 2
--	-------	-------

ENAKOSTI	
RAZLIKE	

- Namesto kvadrata in pravokotnika izberi modela drugih dveh štirikotnikov. Primerjaj ju. Svoje ugotovitve predstavi sošolcu.

Razvrščaj štirikotnike

Danih je šest nalog. Pri vsaki nalogi izberi ustrezne modele likov.

- Med danimi modeli štirikotnikov izberi vse modele kvadrata.
- Med danimi modeli štirikotnikov izberi vse modele pravokotnika.
- Med danimi modeli štirikotnikov izberi vse modele romba.
- Med danimi modeli štirikotnikov izberi vse modele paralelograma.
- Med danimi modeli štirikotnikov izberi vse modele trapeza.
- Med danimi modeli štirikotnikov izberi vse modele deltoida.

S sošolcem preverita, ali se vajini izbiri ujemata. Če se vajini izbiri razlikujeta, drug drugemu utemeljita vsak svojo rešitev in ugotovita, katera rešitev je pravilna.

Avtorica: mag. Melita Gorše Pihler · Strokovni urednici: mag. Andreja Bačnik in Simona Slavič Kumer · ZRSŠ, 2017

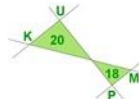
Mačke

Tiger je mačka.
Ali je vsaka
mačka tiger?





Vir slike: <http://www.tigers-world.com/bengal-tiger/>

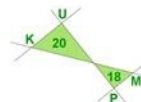
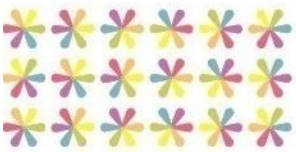
Poiščite podoben primer.



Primerjajmo štirikotnike

Primerjajte lika. Zapišite enake lastnosti in lastnosti, po katerih se kvadrat in pravokotnik razlikujeta.

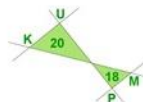
		
ENAKOSTI		
RAZLIKE		



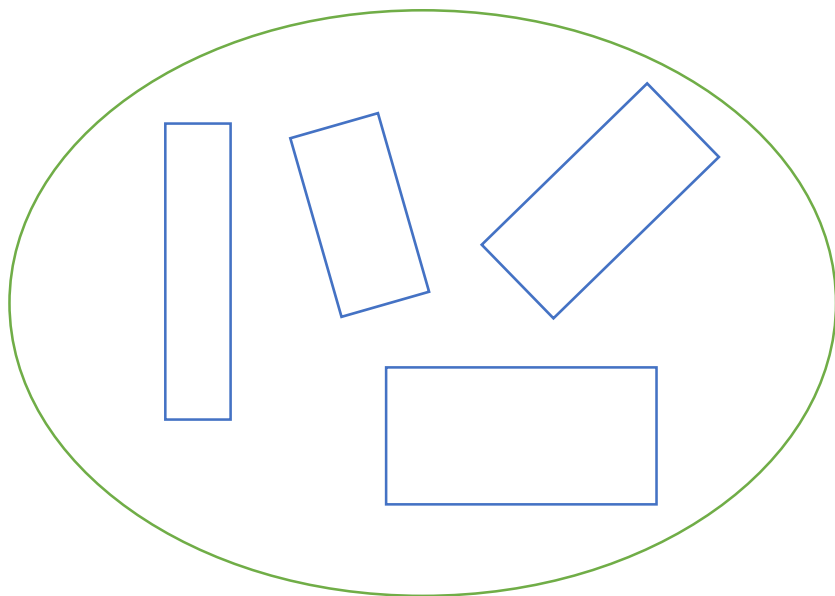
Ravni geometrijskega mišljenja

(Van Hiele)

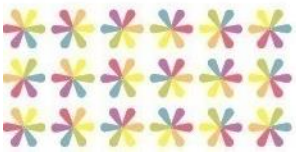
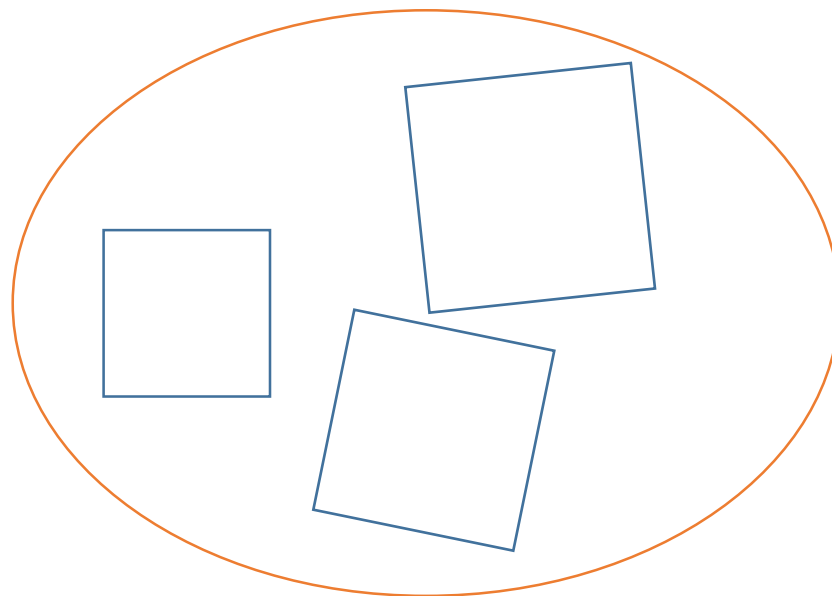
- Vizualna raven
- Opisna raven
- Raven povezovanja oz. neformalnega sklepanja
- Raven formalnega sklepanja
- Raven rigoroznega sklepanja



Pravokotniki



Kvadrati



Pravokotniki

Nasprotni stranici sta
vzporedni.

Sosednji stranici sta
pravokotni.

Nasprotni stranici sta enako
dolgi.

4 stranice, 4 oglišča, 4 koti

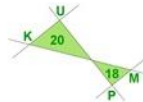
Kvadrati

Nasprotni stranici sta
vzporedni.

Sosednji stranici sta
pravokotni.

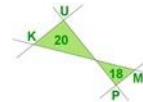
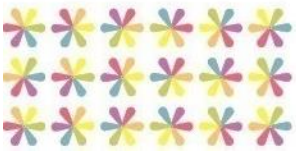
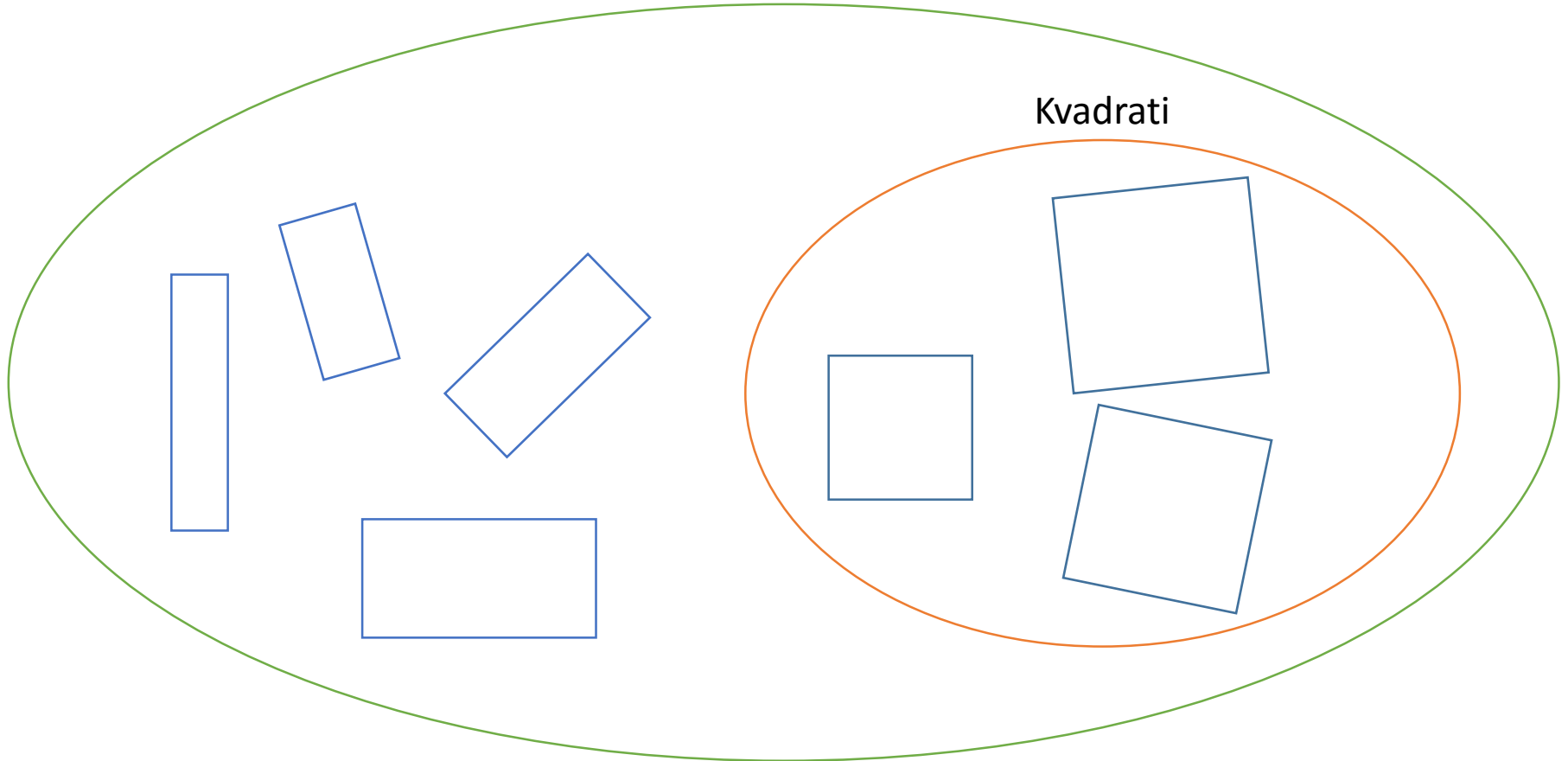
Vse stranice so enako
dolge.

4 stranice, 4 oglišča, 4 koti



Pravokotniki

Kvadrati



Pravokotniki

Nasprotni stranici sta *vzporedni*.
Sosednji stranici sta *pravokotni*.
Nasprotni stranici sta enako dolgi.
4 stranice, 4 oglišča, 4 koti

Pravokotnik je **štirikotnik**, ki ima 2 para *vzporednih* stranic in (en) *pravi* kot.

Pravokotnik je štirikotnik, ki ima 4 prave kote.

Pravokotnik je štirikotnik, ki ima 3 prave kote.

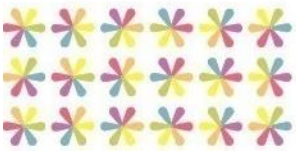
Kvadrati

~~Nasprotni stranici sta
vzporedni.
Sosednji stranici sta
pravokotni.
Vse stranice so enako
dolge.
4 stranice, 4 oglišča, 4 koti~~

Kvadrat je **štirikotnik**, ki ima 2 para *vzporednih* stranic in (en) *pravi* kot. Vse stranice so enako dolge.

Kvadrat je štirikotnik, ki ima 4 prave kote in enako dolge stranice.

Kvadrat je štirikotnik, ki ima 3 prave kote in enako dolgi sosednji stranici.



Pravokotniki

Nasprotni stranici sta vzporedni.
Sosednji stranici sta pravokotni.
Nasprotni stranici sta enako dolgi.
4 stranice, 4 oglišča, 4 koti

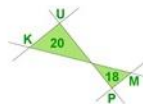
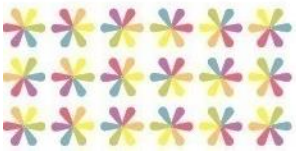
Kvadrati

Vse stranice so enako dolge.

Pravokotnik je štirikotnik, ki ima 2 para vzporednih stranic in (en) pravi kot.

Pravokotnik je štirikotnik, ki ima 2 para vzporednih stranic in vse kote prave.

Kvadrat je **pravokotnik**, ki ima enako dolge stranice.

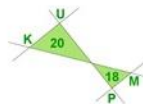


Generična definicija geometrijskega pojma

Pojem definiramo s pomočjo najbližjega „rojstnega pojma“ in lastnosti, ki so nujne in med seboj neodvisne (Prvanović, 1970).

Kvadrat je **pravokotnik**, ki ima enako dolge stranice.

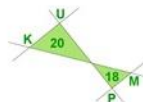
Kvadrat je **romb**, ki ima vse notranje kote prave.



Ugotovitev



Vse lastnosti, ki karakterizirajo kvadrat, veljajo tudi za pravokotnik.

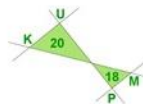
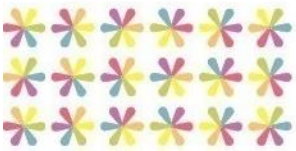
**Vsak kvadrat je
pravokotnik.**



Primerjajmo štirikotnike

Primerjajte lika. Zapišite enake lastnosti in lastnosti, po katerih se štirikotnika razlikujeta.

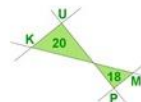
		
ENAKOSTI		
RAZLIKE		



Ugotovitev



Vse lastnosti, ki karakterizirajo paralelogram, veljajo tudi za pravokotnik.

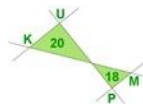
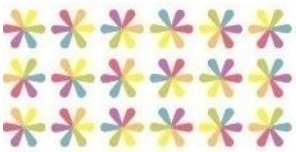
Vsak pravokotnik je paralelogram.



Primerjajmo štirikotnike

Primerjajte lika. Zapišite enake lastnosti in lastnosti, po katerih se štirikotnika razlikujeta.

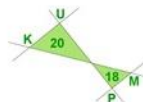
		
ENAKOSTI		
RAZLIKE		



Ugotovitev

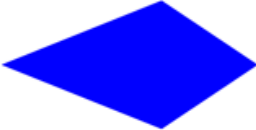

Vse lastnosti, ki karakterizirajo romb, veljajo tudi za kvadrat.

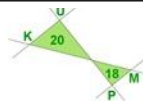
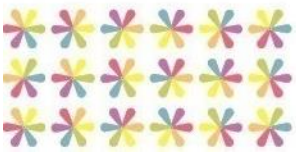
**Vsak kvadrat je
romb.**



Primerjajmo štirikotnike

Primerjajte lika. Zapišite enake lastnosti in lastnosti, po katerih se štirikotnika razlikujeta.

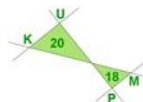
		
ENAKOSTI		
RAZLIKE		



Ugotovitev



Vse lastnosti, ki karakterizirajo deltoid, veljajo tudi za romb.

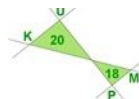
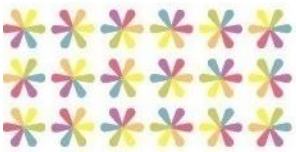
Vsak romb je deltoid.



Primerjajmo štirikotnike

Primerjajte lika. Zapišite enake lastnosti in lastnosti, po katerih se štirikotnika razlikujeta.

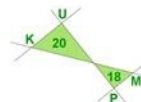
		
ENAKOSTI		
RAZLIKE		



Ugotovitev

Vse lastnosti, ki karakterizirajo paralelogram, veljajo tudi za romb.

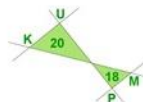
**Vsak romb je
paralelogram.**



Različne definicije trapeza



(Bezgovšek Vodušek, 2016)

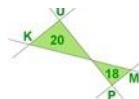
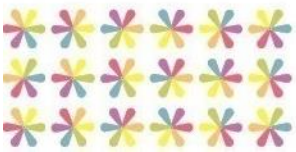
- Štirikotnik z vsaj enim parom vzporednih stranic je trapez. (Učbenik 1)
- Trapez je štirikotnik z dvema vzporednima, neskladnima stranicama in parom krakov. (Učbenik 2)
- Trapez je štirikotnik, v katerem sta dve stranici vzporedni. Vzporedni stranici imenujemo osnovnici, nevzporedni pa kraka. (Učbenik 3)
- Trapez je štirikotnik, ki ima en par vzporednih stranic. (Učbenik 4)



Primerjajmo štirikotnike

Primerjajte lika. Zapišite enake lastnosti in lastnosti, po katerih se štirikotnika razlikujeta.

		
ENAKOSTI		
RAZLIKE		



Ugotovitev

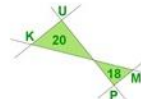
Vse lastnosti, ki karakterizirajo trapez, veljajo tudi za paralelogram.

Vsak paralelogram je trapez.

Opomba



Ugotovitev velja, če privzamemo:

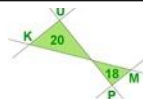
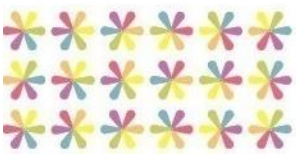
Trapez je štirikotnik, ki ima vsaj en par vzporednih stranic.



Primerjajmo štirikotnike

Primerjajte lika. Zapišite enake lastnosti in lastnosti, po katerih se štirikotnika razlikujeta.

		
ENAKOSTI		
RAZLIKE		



Ugotovitev

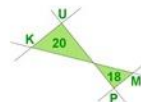
Vse lastnosti, ki karakterizirajo trapez, veljajo tudi za pravokotnik.

Vsak pravokotnik je trapez.

Opomba

Ugotovitev velja, če privzamemo:

Trapez je štirikotnik, ki ima vsaj en par vzporednih stranic.



Vsak romb je paralelogram.

Vsak paralelogram je trapez.

Vsak pravokotnik je paralelogram.

Vsak romb je deltoid.

Vsak romb je trapez.

Vsak kvadrat je pravokotnik.

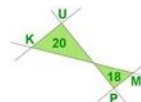
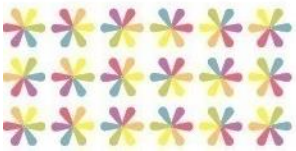
Vsak kvadrat je trapez.

Vsak kvadrat je deltoid.

Vsak kvadrat je paralelogram.

Vsak kvadrat je romb.

Vsak pravokotnik je trapez.

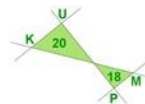


Razvrščajmo štirikotnike

Razvrščaj štirikotnike

Danih je šest nalog. Pri vsaki nalogi izberi ustrezne modele likov.

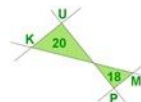
1. Med danimi modeli štirikotnikov izberi vse modele **kvadrata**.
2. Med danimi modeli štirikotnikov izberi vse modele **pravokotnika**.
3. Med danimi modeli štirikotnikov izberi vse modele **romba**.
4. Med danimi modeli štirikotnikov izberi vse modele **paralelograma**.
5. Med danimi modeli štirikotnikov izberi vse modele **trapeza**.
6. Med danimi modeli štirikotnikov izberi vse modele **deltoida**.



Ravni geometrijskega mišljenja

(Van Hiele)

- Vizualna raven
- Opisna raven
- Raven povezovanja oz. neformalnega sklepanja
- Raven formalnega sklepanja
- Raven rigoroznega sklepanja



Dopolni povedi. Izbiraj med pojmi: kvadrat, pravokotnik, romb, paralelogram, trapez, deltoid. Zapiši vse možnosti.

Vsak kvadrat je _____.

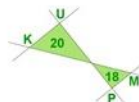
Vsak pravokotnik je _____.

Vsak romb je _____.

Vsak paralelogram je _____.

Vsak trapez je _____.

Vsak deltoid je _____.



Definicije štirikotnikov

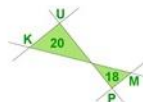
Dopolni poved.

Kvadrat je pravokotnik, ki _____.

Za sošolca sestavi dve podobni nalogi. Sošolec naj sestavi dve podobni nalogi zate. Po reševanju drug drugemu preverita pravilnost in podajta povratno informacijo.

Nalogi, ki ju je zate sestavil tvoj sošolec:

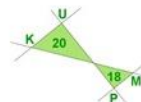
Povratna informacija:



Ravni geometrijskega mišljenja

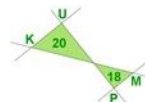
(Van Hiele)

- Vizualna raven
- Opisna raven
- Raven povezovanja oz. neformalnega sklepanja
- Raven formalnega sklepanja
- Raven rigoroznega sklepanja

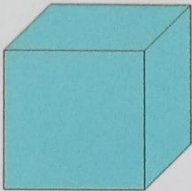
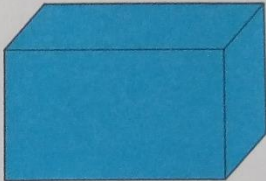


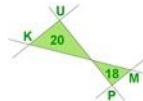
Možnosti uporabe dejavnosti z izobraževalnega lističa

- Na podlagi definicij različnih štirikotnikov učenci iščejo njihove slikovne reprezentacije.
- Za preverjanje razumevanja definicij.
- Carollov diagram (npr. po kriteriju: je pravokotnik, ni pravokotnik).
- Venov diagram (npr. kvadrati, pravokotniki).
- Uporaba idej z lističa Primerjajmo in razvrstimo štirikotnike (Scientix) v primerih geometrijskih teles.



Izdelek učenca 6. razreda

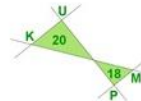
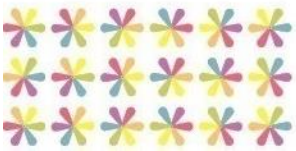
PRIMERJAM KOCKO IN KVADER		
		
Telo	KOCKA	KVADER
Enakosti	<p>Oba imata enako število robov, stranic, oglišč, ploskev.</p>	
Razlike	<p>Kocka ima enako dolge^{velike} stranice in ploskve. Kvader ima nima enako dolge^{velike} stranice in ploskve.</p>	



Hvala za
sodelovanje!



Vir slike: <http://moziru.com/explore/Polygon%20clipart%20quadrilateral/>



Viri

- Bezgovšek Vodušek, H. (2016). *Trapez – en, vsaj en ali natanko en par?* v KUPM 2016: zbornik razširjenih povzetkov. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno 30. 3. 2018 na <https://www.zrss.si/digitalnknjiznica/zbornik-kupm-2016-povzetki/files/assets/basic-html/index.html#1>.
- Burger, W. F., Shaughnessy, J. M. (1986). *Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry V Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 17, No. 1, 31-48.*
- Gorše Pihler, M. (2017). *Izobraževalni listič Scientix NA-MA: Primerjajmo in razvrstimo štirikotnike.* Pridobljeno 30. 3. 2018 na <http://url.sio.si/nN7>.
- Kmetič, S., Miholič, T., Zobec, V. (2015). *Do višine trikotnika po več poteh* v KUPM 2014: zbornik prispevkov. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno 30. 3. 2018 na <https://www.zrss.si/pdf/zbornik-prispevkov-kupm2014.pdf>.
- Prvanović, S. (1970). *Metodika savremenog matematičkog obrazivanja u osnovnoj školi.* Beograd: Zavod za izdavanje udžbenika socijalističke republike Srbije.
- Škrbec, M. (2013). *Pristop k poučevanju geometrije po van Hieleju v drugem triletju osnovne šole.* Doktorska disertacija. http://pefprints.pef.uni-lj.si/1538/1/Maja_%C5%A0krbec_doktorska.pdf. (30. 3. 2018). Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.
- Van Dormolen, J., Zaslavsky, O. (2003). *The many facets of a definition: The case of periodicity.* Journal of Mathematical Behavior, 22, 91-106.
- Vega 1 (2014): e-učbenik za matematiko v 1. letniku gimnazij. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno 30. 3. 2018 na <http://eucbeniki.sio.si/vega1/>.

