FINANČNA MATEMATIKA V GIMNAZIJI

KLARA PUGELJ

Srednja vzgojiteljska šola in gimnazija Ljubljana

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT

EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

O tekmovanju iz Finančne matematike in statistike za gimnazijce

skupina **POSLOVNA MATEMATIKA**
(začetek šol. leto 2002/2003)

tekmovanje iz Poslovne matematike

tekmovanje iz Statistike

skupina **POSLOVNA IN FINANČNA MATEMATIKA TER STATISTIKA**
(začetek šol. leto 2013/2014)

tekmovanje iz Poslovne matematike

tekmovanje iz Statistike

tekmovanje iz Finančne matematike in statistike za gimnazijce

Tekmovanje iz Finančne matematike in statistike za gimnazijce

- Tekmovanje poteka na šolski in državni ravni.
  (Podeljena so bronsta, srebrna in zlata priznanja.)

- V šolskem letu 2017/2018 je sodelovalo 11 gimnazij oziroma 120 tekmovalcev. Na državno tekmovanje se je uvrstilo 36 dijakov. Štirje dijaki so prejeli zlato priznanje.

TEME, KI JIH TEKMOVANJE ZAJEMA:

1. **GIMNAZIJSKA STATISTIKA**
2. **OBRESTOVANJE IN OBRESTNE MERE**
3. **OBVEZNICE**
4. **TERMINSKI POSLI IN OPCIJE**

Tekmovanje iz Finančne matematike in statistike za gimnazijce

- Dodatno gradivo za pripravo na tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike:
  http://www.dmfa.si/Tekmovanja/Gradiva/FMS_gradivo_2016.pdf

- Kokol Bukovšek, D., Mojškerc, B. (2014): Matematika za poslovne in ekonomske vede: Naloge in izpitni primeri, Ekonomska fakulteta, Ljubljana.

- Toman, A. (2016): Rešene naloge iz finančne matematike 1: Finančni instrumenti, DMFA, Ljubljana.

https://www.dmfa.si/tekmovanja/PMSS/VsebinskiProgram.aspx

Obveznice

Ena najstarejših nalog bank je **posojilo denarja**. Komitenti svoj denar hranijo na banki v obliki **depozitov**, prejeta sredstva pa lahko banka v vmesnem času posodi drugim komitentom v obliki **kredita**. Na tak način si denar lahko sposodijo **posamezniki in manjša podjetja**, saj je glavnica majhna v primerjavi s celotnim kapitalom banke.

Obveznice

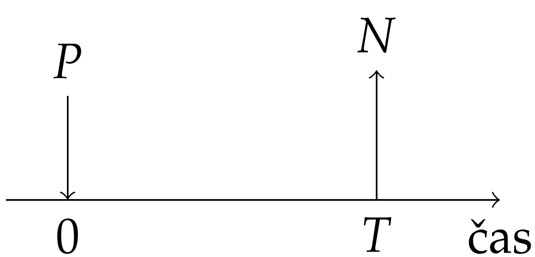
Denar pa si morajo sposojati tudi **velika podjetja in države**. Uradniki s finančnih **ministrstev** in direktorji **velikih podjetij** ne morejo kar oditi na banko in zaprositi za večmiljardni kredit. Če propadejo, dolga ne povrnejo in s tem propade tudi banka. Rešitev problema je **razbitje posojila na veliko število manjših posojil**, ki jih država ali podjetje sklene z različnimi posojilodajalci, in ta posojila imenujemo obveznice.

Obveznice

Kupci obveznic posodijo denar državi ali velikemu podjetju, obveznica pa je dokument, ki jim zagotavlja vračilo posojila.

- **BREZKUPONSKE OBVEZNICE** (posojilo vrnjeno v enkratnem znesku)
- **KUPONSKE OBVEZNICE** (del posojila povrnjen v obliki kuponov)

BREZKUPONSKA OBVEZNICA

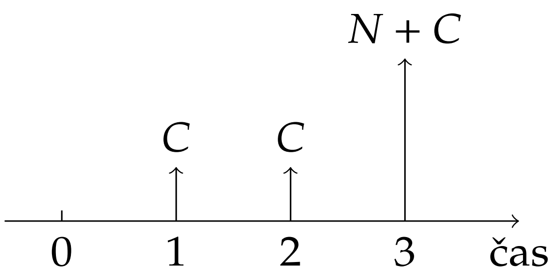


$$P = \frac{N}{(1 + R(0,T))^T}$$

Z obveznico se izdajatelj obveže, da nam bo ob času T izplačal N, mi pa plačamo ceno P.

Obveznice

KUPONSKA OBVEZNICA



$$P = \frac{C}{1 + R(0,1)} + \frac{C}{(1 + R(0,2))^2} + \cdots + \frac{C + N}{(1 + R(0,T))^T}$$

Kuponska obveznica pa poleg izplačila nominalne vrednosti ob dospetju ponuja še izplačila kuponov pred in ob dospetju ob točno določenih kuponskih datumih.

Običajo so vsi kuponi enaki in njihovo višino označimo s C. Najpogostejše so obveznice z letnimi kuponi, ki izplačujejo kupone enkrat letno v enakih časovnih razmikih, prvič leto po izdaji, zadnjič pa ob dospetju skupaj z nominalno vrednostjo.

Obveznice

Zakladne menice Republike Slovenije so brezkuponske obveznice in so kratkoročne do enega leta in pol.

Kuponske obveznice pa so **dolgoročni vrednostni papirji** z dospetjem 10 let ali pa celo 30 let.

Slovenija je obveznico z najdaljšim dospetjem izdala v avgustu 2015 in ima dospetje 30 let. V prvi polovici leta 2016 sta Irska in Belgija izdali evrski kuponski obveznici z dospetjem 100 let.

Prvo stoletno obveznico v evrih pa je izdala Mehika v letu 2015.

Naloga iz obveznic (šol. tek. 2014/2015)

Spodnja preglednica prikazuje obrestne mere za različna dospetja. Čas t merimo v letih:

t	1	2	3
$R(0,t)$	2 %	$R(0,2)$	3 %

Na trgu obstajata dve obveznici istega izdajatelja. Obe imata nominalno vrednost 100 EUR.

a) *Prva obveznica je brezkuponska. Njeno dospetje je čez 2 leti, njena trenutna cena pa je* $95\ EUR$. *Določi obrestno mero* $R(0,2)$.
b) *Druga obveznica je klasična kuponska obveznica z nominalno obrestno mero* $4\ \%$ *in dospetjem čez 3 leta. Naslednji kupon bo izplačan čez natanko eno leto. Določi ceno kuponske obveznice v času 0.*
c) *Kolikšna bi morala biti nominalna obrestna mera kuponske obveznice iz b), da bi bila njena cena v času 0 enaka njeni nominalni vrednosti.*

Naloga iz obveznic (šol. tek. 2014/2015)

a) *Prva obveznica je brezkuponska. Njeno dospetje je čez 2 leti, njena trenutna cena pa je* $95\ EUR$. *Določi obrestno mero* $R(0,2)$.

$$95 = \frac{100}{(1+R(0,2))^2}$$

b) *Druga obveznica je klasična kuponska obveznica z nominalno obrestno mero* $4\ \%$ *in dospetjem čez 3 leta. Naslednji kupon bo izplačan čez natanko eno leto. Določi ceno kuponske obveznice v času 0.*

$$P = \frac{4}{1{,}02} + \frac{4}{(1+R(0{,}2))^2} + \frac{4+100}{1{,}03^3}$$

c) *Kolikšna bi morala biti nominalna obrestna mera kuponske obveznice iz b), da bi bila njena cena v času 0 enaka njeni nominalni vrednosti.*

$$100 = \frac{C}{1{,}02} + \frac{C}{(1+R(0{,}2))^2} + \frac{C+100}{1{,}03^3}$$

Terminski posel na delnico

- Delnica je trajni vrednostni papir, ki predstavlja **lastništvo dela podjetja**.

- Tržna cena delnice se določa na osnovi ponudbe in povpraševanja in je tesno povezana z uspešnostjo podjetja in gospodarskimi razmerami, zato je v prihodnosti **ni mogoče z gotovostjo napovedati**.

- Kljub temu na finančnih trgih obstajajo institucije (banke), ki nam omogočajo nakup ali prodajo delnice v prihodnosti po danes dogovorjeni ceni. **Ta se bo verjetno razlikovala od tržne cene, a bo za obe stranki zavezujoča.**

- Terminski posel na delnico je dogovor med kupcem in prodajalcem terminskega posla, po katerem bo na določen dan v prihodnosti (ročnost terminskega posla) prodajalec kupcu prodal izbrano delnico po vnaprej določeni izročitveni ceni K.

Arbitražna strategija

Recimo, da želimo, čez en mesec kupiti ali prodati eno delnico podjetja, ki je danes vredna $S_0 = 25\ EUR$, obrestna mera za obdobje enega meseca je $R\left(0, \frac{1}{12}\right) = 2\ \%$.

Predpostavimo, da banka omogoča nakup ali prodajo delnice čez en mesec po ceni:

$$K = 30\ EUR$$

- Potem si danes na banki sposodimo $25\ EUR$ in kupimo delnico.
- Hkrati se z banko dogovorimo, da bomo čez en mesec delnico po ceni K prodali (sklenemo terminski posel).
- Po enem mesecu prodamo delnico po ceni $K = 30\ EUR$.
- Banki vrnemo $25 \cdot 1{,}02^{\frac{1}{12}} = 25{,}04\ EUR$.

→ **ARBITRAŽNA STRATEGIJA nam brez začetne investicije prinese pozitiven in netvegan denarni tok v prihodnosti (Zaslužili smo $4{,}96\ EUR$.)**

Arbitražna strategija

Očitno cena $K = 30\ EUR$ ni sprejemljiva in tudi na trgu se ne bi obdržala, saj bi jo zaradi velikega interesa investitorjev banka znižala. Če ne želimo, da pride do arbitraže se določi izročitvena cena K s pomočjo formule:

$$K = S_0 \cdot (1 + R(0,T))^T$$

Dijaki vse formule iz poglavja terminski posli dobijo na listu s formulami in se jim jih ni potrebno na pamet učiti, morajo jh pa razumeti in znati uporabljati v nalogah.

List s formulami na tekmovanju

Terminski posli

- na delnico, ki ne izplačuje dividend

  $F_t = S_t(1+R)^{T-t}, \quad K = F_0$

  $V_t = S_t - K(1+R)^{-(T-t)}$

- na delnico, ki izplačuje dividende

  $F_t = \big(S_t - I(t,T)\big)(1+R)^{T-t}, \quad K = F_0$

  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$

- valutni terminski posel

  $F_t = S_t \frac{(1+R_d)^{T-t}}{(1+R_f)^{T-t}}, \quad K = F_0$

  $V_t = N\big(S_t(1+R_f)^{-(T-t)} - K(1+R_d)^{-(T-t)}\big)$

- dogovor o terminski obrestni meri

  $R(t,S,T) = \frac{1}{T-S}\left(\frac{1+R(0,T)\cdot(T-t)}{1+R(0,S)\cdot(S-t)} - 1\right), \quad K = R(0,S,T)$

  $V_t = \frac{N\cdot\big(R(t,S,T)-K\big)\cdot(T-S)}{1+R(t,T)\cdot(T-t)}$

Opcije – primer

Odločimo se, da bomo čez pol leta kupili avtomobil.

Namesto da s prodajalcem avtomobila sklenemo zavezujočo pogodbo o nakupu avtomobila čez 6 mesecev, nam prodajalec proda opcijo, ki nam omogoča, da čez 6 mesecev kupimo željeni avtomobil po ceni 10.000 EUR. Gre za opcijo, kar pomeni, da jo lahko izkoristimo, ni pa nujno.

Mine 6 mesecev in odločimo se za nakup avtomobila. Obiščemo prodajalca in ta nam ves sijoč pove, da naš izbran model avtomobila ne stane več 10.000 EUR, temveč le še 9500 EUR.

Ali naj vztrajamo pri naši opciji in kupimo avtomobil po ceni 10.000 EUR?

Opcije – primer

Seveda ne, saj bomo brez izvršitve opcije plačali 500 EUR manj.
Torej pustimo, da opcija propade.

Če pa bi bila aktualna cena vozila višja od 10.000 EUR, bi opcijo izvršili in tako kupili avtomobil po ceni 10.000 EUR, ne glede na to, koliko dražji je takrat avtomobil.

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT
EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

List s formulami na tekmovanju

Opcije

- izplačilo ob zapadlosti

  $C_T = \max\{S_T - K, 0\}$

  $P_T = \max\{K - S_T, 0\}$

- premija v času t, če delnica ne izplačuje dividend

  $\max\left\{S_t - K(1+R)^{-(T-t)}, 0\right\} \leq c_t \leq S_t$

  $\max\left\{K(1+R)^{-(T-t)} - S_t, 0\right\} \leq p_t \leq K(1+R)^{-(T-t)}$

- pariteta evropskih opcij, če delnica ne izplačuje dividend

  $p_t + S_t = c_t + K(1+R)^{-(T-t)}$

- premija v času t, če delnica izplačuje dividende

  $\max\left\{S_t - K(1+R)^{-(T-t)} - I(t,T), 0\right\} \leq c_t \leq S_t - I(t,T)$

  $\max\left\{K(1+R)^{-(T-t)} - S_t + I(t,T), 0\right\} \leq p_t \leq K(1+R)^{-(T-t)}$

- pariteta evropskih opcij, če delnica izplačuje dividende

  $p_t + S_t - I(t,T) = c_t + K(1+R)^{-(T-t)}$

- evropske in ameriške opcije

  $c_t^{\mathrm{E}} \leq c_t^{\mathrm{A}}, \quad p_t^{\mathrm{E}} \leq p_t^{\mathrm{A}}$

Literatura

- Košir, T., Pugelj, K., Toman A. (2016): Dodatno gradivo za pripravo na tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike, DMFA, Ljubljana.
- Kokol Bukovšek, D., Mojškerc, B. (2014): Matematika za poslovne in ekonomske vede: Naloge in izpitni primeri, Ekonomska fakulteta, Ljubljana.
- Toman, A. (2016): Rešene naloge iz finančne matematike 1: Finančni instrumenti, DMFA, Ljubljana.

Hvala za pozornost!