

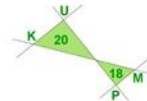
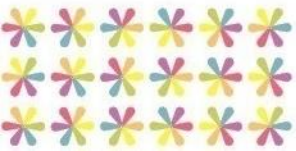


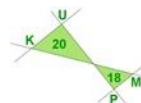
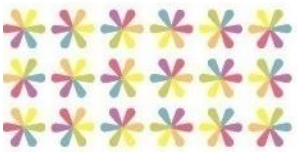
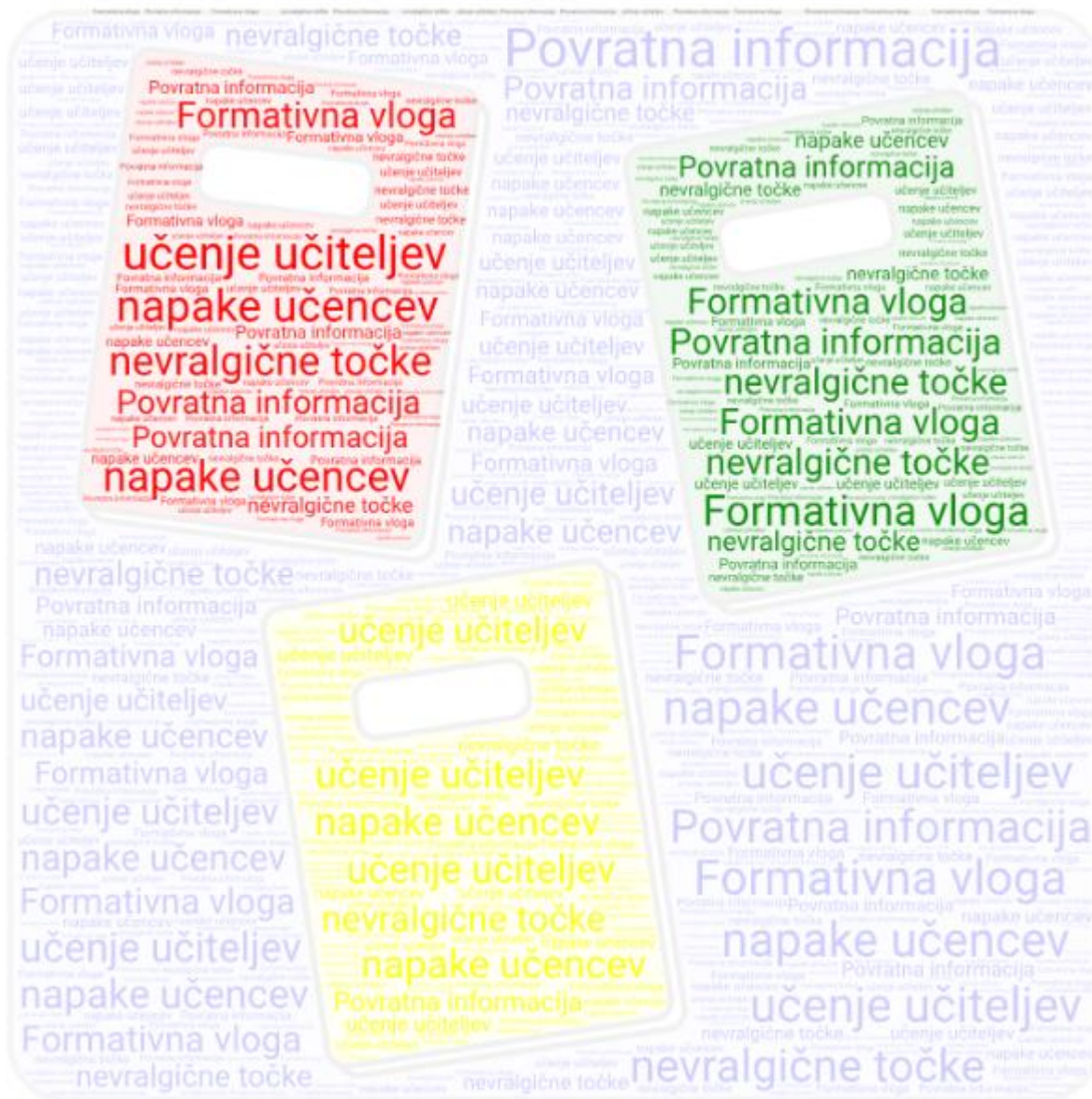
NAPAKE PRI REŠEVANJU NALOG - IZRAZI IN ENAČBE

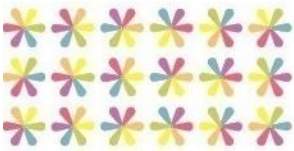
Jerneja Bone, Klavdija Cof Mlinšek

Zavod RS za šolstvo, OŠ Vodice

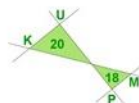
Jerneja.bone@zrss.si, cof.klavdija@gmail.com







4. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike KUPM 2018



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Enačbe – 6. in 9. razred

NPZ 2016, 6. razred, 5. b naloga

Katera števila iz množice rešitev $U = \{2,4,6,8,10,12\}$ so rešitve dane enačbe?

$$36 : x = 4$$

PRIMERI NAPAČNIH REŠEVANJ

$$36 : x = 4$$

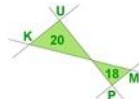
Odgovor: 9, 8.

$$36 : x = 4$$

Odgovor: 8 

$$36 : x = 4$$

Odgovor: število 12.



NPZ 2016 6. razred, 5. a naloga

V množici naravnih števil reši enačbo in zapiši množico rešitev.

$$36 : x = 4$$
$$x = 36 : 4$$
$$x = 8$$



$$\mathcal{R} = \{ \underline{8} \}$$

$$36 : x = 4$$
$$x = 36 \cdot 4$$
$$x = 144$$

$$\begin{array}{r} 36 \cdot 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\mathcal{R} = \{ \underline{144} \}$$

PRIMERI NAPAČNIH REŠEVANJ

$$36 : x = 4$$
$$x = 36 : 4$$
$$x = 9$$

$$\text{Br. } 36 : x = 4$$
$$36 : 9 = 4$$
$$4 = 4$$

$$\mathcal{R} = \{ \underline{4} \}$$



$$36 : x = 4$$
$$= 36 \cdot 4$$
$$= 144$$

$$\begin{array}{r} 36 \cdot 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\mathcal{R} = \{ \underline{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9} \}$$



PRIMERI NALOG, VPRAŠANJ, DEJAVNOSTI

• Primer 1

Zapiši množico rešitev dane enačbe.

$$35 : x = 7$$

$$x = 5$$

Razloži, kaj predstavljata zapisa.
Pojasni, kaj si zapisal na črto.

• Primer 2

Kaj je rešitev enačbe?

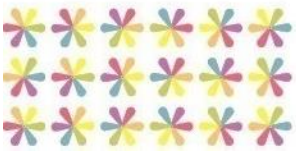
$$42 : x = 7$$

$$x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$R = \{6\}$$

V čem sta si nalogi podobni, v čem se razlikujeta?

Razloži, kaj predstavljata zapisa.
Pojasni, kaj si zapisal na črto.



• Primer 3

Zapiši enačbo, ki bo ustrezala dani rešitvi.

$$x = 8$$

$$R = \{8\}$$

Razloži, kaj predstavljata zapisa.

Pojasni, kaj si zapisal na črto.

Primerjaj svojo rešitev z rešitvijo sošolca.

Ali obstaja samo ena enačba s tako množico rešitve?

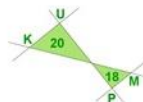
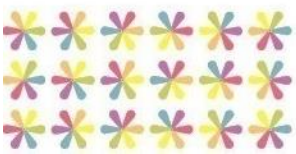
• Primer 4

Katero število iz dane množice $U = \{2,4,6,15\}$ so rešitve enačbe $5 \cdot x = 20$?

Obkroži črko pred vsakim pravilnim odgovorom.

A $R = \{2\}$ B $R = \{4,15\}$ C $R = \{4\}$ D $R = \{15\}$

Utemelji/pojasni svoj odgovor.



PRIMERI NALOG, VPRAŠANJ, DEJAVNOSTI

• Primer 1

Med spodnjimi zapisi poišči enačbo. Obkroži črko pred pravilnim odgovorom. Pojasni svojo izbiro.

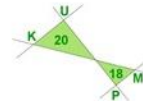
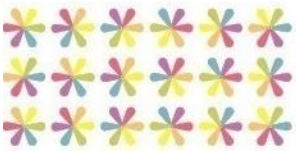
- A $2x = -1$
- B $2x + 1 =$
- C $2x + 1 = 0$
- D $R = \{2x + 1\}$

Razmisli, kaj predstavlja vsak zapis. Kaj je podobno in kaj različno med enačbo in algebrskim izrazom?

• Primer 2

Med spodnjimi zapisi poišči algebrski izraz. Obkroži črko pred pravilnim odgovorom. Pojasni svojo izbiro.

- A $2x + 1 = 2x - 1$
- B $2x + 1 =$
- C $2x + 1 - 2x + 1 =$
- D $R = \{2x + 1\}$



NPZ 2017 9. razred, 3. naloga

Reši enačbo $3 \cdot (x - 3) = 2x - (9 - 7x)$ in napravi preizkus.

PRIMERI NAPAČNIH ALI NEPOPOLNIH REŠEVANJ

Reševanje:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (x - 3) &= 2x - (9 - 7x) \\ \underline{3x} - 9 &= \underline{2x} - 9 - \underline{7x} \quad \times \\ 3x - 2x + 7x &= 9 - 9 \\ 8x &= 0 \quad \checkmark \\ \underline{\underline{x}} &= \underline{\underline{0}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Preizkus:

$$\begin{aligned} L: 3(0 - 3) \\ &= \underline{\underline{0 - 3}} \quad \times \\ D = 0 - (9 - 0) \\ \underline{\underline{D = -9}} \end{aligned}$$

Reševanje:

$$3 \cdot (x - 3) = 2x - (9 - 7x)$$

$$3x - 9 = 2x - 9 + 7x$$

$$3x - 2x - 7x = +9 - 9$$

$$-6x = 0 \quad | : (-6)$$

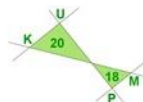
$$x = 0$$

Preizkus:

$$3 \cdot (0 - 3) = 2 \cdot 0 - (9 - 7 \cdot 0)$$

$$3 \cdot 0 = 2 \cdot 0 - 9 + 7 \cdot 0$$

$$0 = 0 \Rightarrow L = D \{0\}$$



Reševanje:

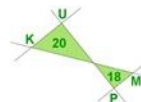
$$\begin{aligned}3 \cdot (x-3) &= 2x - (9-7x) \\3 \cdot x - 3 &= 2x - 9 + 7x \quad \times \\3x - 3 &= 2x - 9 + 7x \\3x - 2x - 7x &= -9 + 3 \\-6x &= -6 \quad \checkmark \\x &= 1 \quad \checkmark\end{aligned}$$

glede na 3.b.1

glede na 3.b.2

Preizkus:

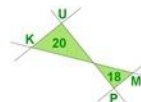
$$\begin{aligned}L: 3 \cdot (1-3) &= & D &= 2 \cdot 1 - (9+7 \cdot 1) \\&= 3-9 & D &= 2-16 \\&= -6 & D &= -14 \quad \times\end{aligned}$$



Reševanje:

Preizkus:

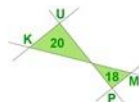
$$3 \cdot (x-3) = 2x - (9-7x)$$
~~$$3x - 9 = 2x - 9 + 7x$$~~~~$$3x - 2x - 7x = -9 + 9$$~~
$$3x - 9 = 2x - 9 + 7x \quad \checkmark$$
$$3x - 2x - 7x = -9 + 9$$
$$6x = 0 \quad \times$$
$$=$$



Reševanje:

Preizkus:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (x-3) &= 2x - (9-7x) \\ 3x - 9 &= 2x - 9 + 7x \quad /+9 \quad \checkmark \\ 3x &= 2x + 7x \\ 3x &= 9x \quad 3 = 9 \quad \times \end{aligned}$$



PRIMERI NALOG, VPRAŠANJ, DEJAVNOSTI

• Primer 1

Ali je $x = 3$ rešitev enačbe $5x - 3 = 2 \cdot (2x - 3)$?

Pojasni svoj odgovor.

Leva stran:

$$\begin{aligned}5x - 3 &= \\= 5 \cdot 3 - 3 &= \\= 15 - 3 &= 12\end{aligned}$$

Desna stran:

$$\begin{aligned}2 \cdot (2x - 3) &= \\= 2 \cdot (2 \cdot 3 - 3) &= \\= 2 \cdot (6 - 3) &= \\= 2 \cdot 3 &= 6\end{aligned}$$

$L \neq D$

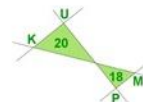
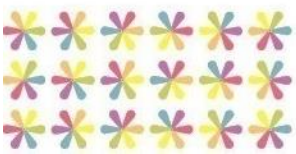
Razmisli, ali je neko število rešitev enačbe.

Kaj nam pove preizkus? Ali je zapisano že narejen preizkus? Je preizkus korektno zapisan?

Kaj pomeni zapis $L \neq D$?

Pri odgovoru uporabi matematično terminologijo.

Odgovor: _____



• Primer 2

Ali je $x = -3$ rešitev enačbe $5x - 3 = 2 \cdot (2x - 3)$? Pojasni svoj odgovor.

$$\begin{aligned}5x - 3 &= 2 \cdot (2x - 3) \\5 \cdot (-3) - 3 &= 2 \cdot (2 \cdot (-3) - 3) \\(-15) - 3 &= 2 \cdot (-6 - 3) \\-18 &= 2 \cdot (-9) \\-18 &= -18\end{aligned}$$

Odgovor: _____

Razmisli, ali je neko število rešitev enačbe. Kaj nam pove preizkus? Ali je zapisno že narejen preizkus? Je preizkus korektno zapisan? Kaj pomeni zapis $-18 = -18$? Pri odgovoru uporabi matematično terminologijo.



Primer 3

Barbara je reševala linearno enačbo z eno neznanko s poskušanjem. Izračunane vrednosti je vpisala v preglednico.

Vrednost neznanke x	Vrednost leve strani enačbe	Vrednost desne strani enačbe
2	16	4
1	14	5
0	12	6
-1	10	7
-2	8	8
-3	6	9
-4	4	10

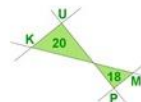
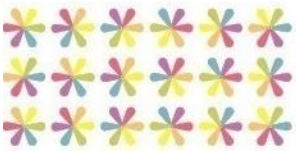
a) Katero število je rešitev enačbe, ki jo je reševala Barbara?

Odgovor: _____

b) Utemelji odgovor.

c) Dopolni spodnji zapis v enačbo, ki bi lahko bila Barbarina.

$$12 + 2x =$$

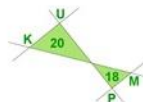


Primer 4

Za enačbo $3x + 7 = 8x - 3$ izpolni preglednico in določi vrednost spremenljivke x , ki je rešitev enačbe.

Vrednost spremenljivke x	Vrednost leve strani enačbe	Vrednost desne strani enačbe
0		
1		
2		
3		

Rešitev enačbe $3x + 7 = 8x - 3$ je število _____.



• Primer 3

Obkroži mesto, kjer je pri reševanju narejena napaka.

Kakšna napaka je narejena?

Svetuj sošolcu. Zapiši/povej pravilo/nasvet, ki ga mora upoštevati.

$$\begin{aligned} 3 \cdot (x-3) &= 2x - (9-7x) \\ \cancel{3x-9} &= \cancel{2x-9+7x} \\ \cancel{3x-7x} &= 7 \\ 3x-9 &= 2x-9+7x \quad \checkmark \\ 3x-2x-7x &= -9+9 \\ 6x &= 0 \quad \times \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot (x-3) &= 2x - (9-7x) \\ 3x-9 &= 2x-9+7x \quad /+9 \quad \checkmark \\ 3x &= 2x+7x \\ 3x &= 9x \quad 3=9 \quad \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot (x-3) &= 2x - (9-7x) \\ \underline{3x-9} &= \underline{2x-9-7x} \quad \times \\ 3x-2x+7x &= 9-9 \\ 8x &= 0 \quad \checkmark \\ \underline{\underline{x}} &= \underline{\underline{0}} \quad \checkmark \end{aligned}$$



• Primer 3

Obkroži mesto, kjer je pri reševanju narejena napaka.

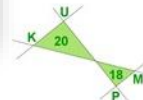
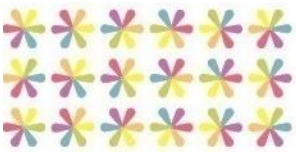
Zakaj preizkus ni narejen prav? Kakšna napaka je narejena?

Svetuj sošolcu, na kaj naj bo pozoren.

$$3 \cdot (x-3) = 2x - (9-7x)$$
$$3x - 9 = 2x - 9 + 7x$$
$$3x - 2x = +9 - 9$$
$$-6x = 0 \quad | :(-6)$$
$$x = 0$$
$$3 \cdot (0-3) = 2 \cdot 0 - (9-7 \cdot 0)$$
$$3 \cdot 0 = 2 \cdot 0 - 9 + 7 \cdot 0$$
$$0 = 0 \Rightarrow L = D \setminus \{0\}$$
$$L: 3 \cdot (x-3) =$$
$$= 3 \cdot (0-3) =$$
$$= 3 \cdot 3$$
$$= 9$$
$$D: 2x - (9-7x) =$$
$$= 2 \cdot 0 - (9-7 \cdot 0) =$$
$$= 0 - (9-0) =$$
$$= 0$$

L = D

Računske napake.

$$L: 3(0-3)$$
$$= \underline{0-3} \quad \times$$
$$D = 0 - (9-0)$$
$$\underline{D = -9}$$


Algebrski izrazi – 6. in 9. razred

NPZ 2017, 6. razred, 2. naloga

Izračunaj vrednosti izrazov, če je $x = 4,2$ in $y = 5,25$

PRIMERI NAPAČNIH ALI NEPOPOLNIH REŠEVANJ

2. b) $x \cdot y =$
 $= 4,2 \cdot 5,25 =$
 $= \underline{\underline{22050}}$

$\begin{array}{r} 5,25 \\ \times 4,2 \\ \hline 1050 \\ 21000 \\ \hline 22050 \end{array}$ **X**

2. c) $y : x =$

$\begin{array}{r} 4,2 \cdot 5,25 = 0,10 \\ \hline 420 \\ \hline 4200 \\ \hline 5126 \\ \hline 1040 \end{array}$ **X**

2. d) $(2 \cdot y - x) : 3 =$

2. a) $x + y =$ **X**

$\begin{array}{r} 5,25 \\ + 4,20 \\ \hline 1,05 \end{array}$



2. d) $(2 \cdot y - x) : 3 =$

$= \underline{\underline{2,16}}$ ❌

$\begin{array}{r} 5,25 \cdot 2 \\ \hline 10,50 \\ - 4,2 \\ \hline 6,48 : 3 \\ \hline 2,16 \end{array}$ ✓

(1 točka)

vrstni red računskih operacij je pravilen, prav tako vstavljene vrednosti (x,y), izraz rešen s pomočjo pomožnih računov. napaka je pri podpisovanju, zato napačen končen rezultat

(2 točki)

$\begin{array}{r} 2,16 \\ \hline 18 \\ \hline 108 \\ \hline 216 \end{array}$

2. a) $x + y = 9,27$ ❌

$4,2 + 5,25$

$\begin{array}{r} 5,25 \\ + 4,2 \\ \hline 9,27 \end{array}$

2. b) $x \cdot y = 4,2 \cdot 5,25$

$\begin{array}{r} 210 \\ 84 \\ \hline 1220 \\ \hline 22060 \end{array}$ ❌

2. d) $(2 \cdot y - x) : 3 =$

$= (2 \cdot 5,25 - 4,2) : 3$

$= (2 \cdot 1,05) : 3$

$= 2,10 : 3$ ❌

$= 0,7$ ❌

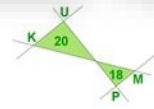
$2,10 : 3 = 0,7$

2. c) $y : x =$

2. d) $(2 \cdot y - x) : 3 = (2 \cdot 4,2 - 5,25) : 3 =$

$= 8,4 - 5,25 = 3,15 : 3 = 1,05$ ❌

$= 1,05$ ❌



PRIMERI NALOG, VPRAŠANJ, DEJAVNOSTI

- Primer 1

Kolikšna je vrednost izraza $x - y$, če je $x = 14,5$ in $y = 10,1$?

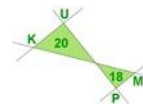
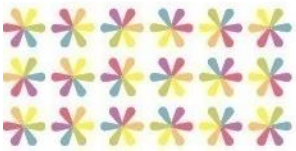
$$x - y = 10,1 - 14,5 = 4,4$$

Kje je napaka? Svetuj sošolcu, na kaj naj bo pozoren.

- Primer 2

V izraz $x \cdot y + y : x$ vstavi vrednost spremenljivk x in y ,

če je $x = \frac{1}{2}$ in $y = \frac{3}{4}$.

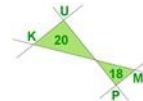


NPZ 2016, 9. razred, 7. naloga

Dan je algebraški izraz $3 - \frac{x}{3}$. Kolikšna je vrednost danega algebraškega izraza, če je vrednost spremenljivke x enaka 10?

Pojmi, ki jih mora učenec poznati in razumeti:

- algebraški izraz
- vrednost algebraškega izraza
- vrednost spremenljivke



NPZ 2016, 9. razred, 7. naloga

Dan je algebrski izraz $3 - \frac{x}{3}$. Kolikšna je vrednost danega algebrskega izraza, če je vrednost spremenljivke x enaka 10?

PRIMERI NAPAČNIH ALI NEPOPOLNIH REŠEVANJ

Reševanje:

$$\frac{3 - \frac{10}{3}}{1} = 1 \cdot 3$$

$$\frac{3}{3} - \frac{10}{3}$$

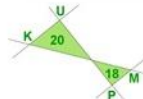
$$\begin{aligned} \frac{3}{3} - \frac{10}{3} &= 1 \cdot 3 \\ &= \frac{3 \cdot 3 \cdot 1}{3 \cdot 1} - \frac{10 \cdot 3 \cdot 1}{3 \cdot 1} \\ &= 3 - 10 = -7 \end{aligned}$$

Odgovor: -7

Reševanje:

$$3 - \frac{10}{3} = 3 - 10 = -10$$

Odgovor: -10



Reševanje:

$$\begin{aligned}
 3 - \frac{x}{3} &= 10 \\
 = 3 - \frac{2}{3} &= \\
 = 3 - 3\frac{1}{3} &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Odgovor: Vrednost je $\frac{1}{3}$.

Primer 10:

Reševanje:

$$\begin{aligned}
 3 - \frac{10}{3} &= \\
 = 3 - 3,33 &= \\
 = 0,33 &=
 \end{aligned}$$

$$10 : 3 = 3,33$$

Odgovor: Vrednost algebrskega izraza je 0,33

Reševanje:

$$\begin{aligned}
 3 - \frac{10}{3} &= \\
 = 3 - 3,3 &= \\
 = -0,3 &=
 \end{aligned}$$

$$\frac{10}{3} : 3 = 3,3$$

$$3 - \frac{x}{3} = 10$$

$$-\frac{x}{3} = 10 - 3 \quad -x = -7$$

$$\frac{x}{3} = 7 \quad | \cdot 3 \quad (2 \text{ točki})$$

Odgovor: 100%,

PRIMERI NALOG, VPRAŠANJ, DEJAVNOSTI

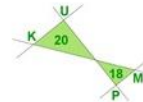
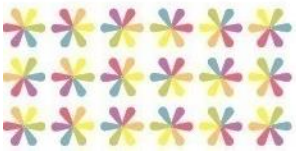
• Primer 1

Kje pri reševanju je narejena napaka?

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} + 4 - \frac{2}{5} = \quad / \cdot 15 \\ & = \frac{2}{3} \cdot 15 + 4 \cdot 15 - \frac{2}{5} \cdot 15 = \\ & = 10 + 60 - 6 = 64 \end{aligned}$$

Primer 2

Izračunaj vrednost izraza $(x - 5)(7 - 3x)$, če je $x = \frac{1}{2}$.



PRIMERI NALOG, VPRAŠANJ, DEJAVNOSTI

- Primer 1

Izračunaj vrednost izraza $(m - 1)^2 - (m - 1)(m + 1)$, če je $m = \frac{1}{2}$.

Reševanje:

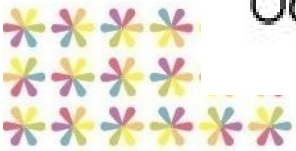
Če je $m = \frac{1}{2}$, je vrednost izraza enaka _____

Primer 2

Ali je vrednost izraza $\frac{7u}{8} - 1\frac{1}{4}$ enaka 4, če je $u = 2$?

Reševanje:

Odgovor: _____



Zavod
Republike
Slovenije
za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT




EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

NPZ 2016, 9. razred, 7. naloga

Dan je algebrski izraz $3 - \frac{x}{3}$. Kolikšna je vrednost spremenljivke x , če je vrednost danega algebrskega izraza enaka -7 ?

PRIMERI NAPAČNIH ALI NEPOPOLNIH REŠEVANJ


Reševanje:

$$\begin{aligned} \frac{3}{3} - \frac{10}{3} &= / \cdot 3 \\ &= \frac{3 \cdot 3 \cdot 1}{3 \cdot 1} - \frac{10 \cdot 3 \cdot 1}{3 \cdot 1} \\ &= 3 - 10 = -7 \end{aligned}$$


Odgovor: vrednost spremenljivke je -7 

Reševanje:

$$\begin{aligned} 3 - \frac{x}{3} &= -7 / \cdot 3 \quad \checkmark \\ 9 - x &= -21 \\ x &= -21 - 9 \\ x &= -30 \end{aligned}$$

Odgovor: vrednost ~~spremenljivke~~ je -30 

Reševanje:

$$3 - \frac{x}{3} = -7 \quad \checkmark$$

$$\frac{3}{1} - \frac{x}{3} = \frac{-7}{1}$$

$$\frac{9}{3} - \frac{x}{3} = \frac{-21}{3} \quad \times$$

Odgovor: $x = -10$ ✗

$$\frac{x}{3} = \frac{-21}{3} - \frac{9}{3}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{-30}{3} \quad /:3$$

$$\underline{\underline{x = -10}}$$

Reševanje: $3 - \frac{30}{3} =$

$$= 3 - 10$$

$$= -7 \quad \times$$

$$\underline{\underline{30}} \quad \checkmark$$

Odgovor: 30 ✔

Reševanje:

$$3 - \frac{x}{3} = -7 \quad / \cdot 3 \quad \checkmark$$

$$6 - x = -21$$

$$x = -21 - 6$$

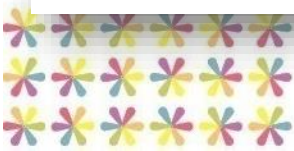
$$x = -27$$

Odgovor: Vrednost x je -27 ✗

Reševanje:

$$3 - \frac{7}{3} = 3 - 10 = -7 \quad \times$$

Odgovor: 7 ✗



PRIMERI NALOG, VPRAŠANJ, DEJAVNOSTI

- Primer 1

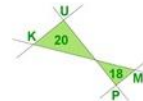
b) Za katero vrednost spremenljivke b ima izraz $2b - 4$ vrednost -6 ?

Reševanje:

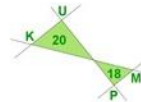
- Primer 2

Za katero vrednost spremenljivke m ima izraz $(m - 1)^2 - (m - 1)(m + 1)$ vrednost 0?

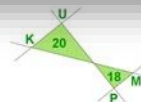
Reševanje:



	Prednosti	Pomanjkljivosti
<p style="text-align: center;">Reševanje učenca A</p> <p>Kolikšna je vrednost spremenljivke x, če je vrednost danega algebrskega izraza enaka -7?</p> <p>Reševanje: $3 - \frac{x}{3} = -7 / \cdot 3$ ✓</p> <p>$9 - x = -21$</p> <p>$x = -21 - 9$</p> <p>$x = -30$</p> <p>Odgovor: <u>Vrednost izraza spremenljivke je -30.</u> ✗</p> <p style="text-align: right;">(2 to)</p>		
<p style="text-align: center;">Reševanje učenca B</p> <p>Kolikšna je vrednost spremenljivke x, če je vrednost danega algebrskega izraza enaka -7?</p> <p>Reševanje: $3 - \frac{x}{3} = -7$</p> <p>$-\frac{x}{3} = -7 - 3$ ✓</p> <p>Odgovor: <u>Vrednost x je 30.</u> ✓</p> <p style="text-align: right;">(2 to)</p>		

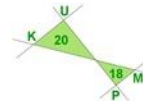
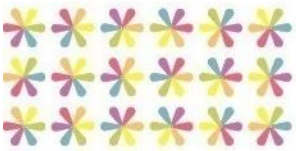


Pojem	Primer	Opis, definicija ...
Številski izraz		
Izraz s spremenljivko		
Enačba		
Neenačba		
Enakost		
Neenakost		

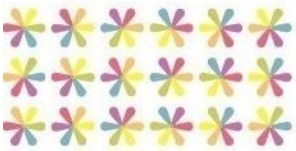


Primerjajmo enačbo in algebrski izraz

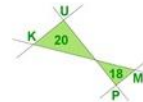
	Enačba	Algebrski izraz
x		
Primer		
Opis		
Rešitev		



kakovost poučevanja in učenja matematike



4. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike KUPM 2018



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST