KONVEKSNE FUNKCIJE MALO DRUGAČE

mag. Aljoša Brlogar

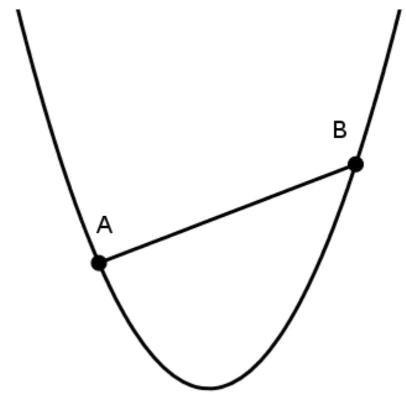
Gimnazija Kranj

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT

EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Uvod

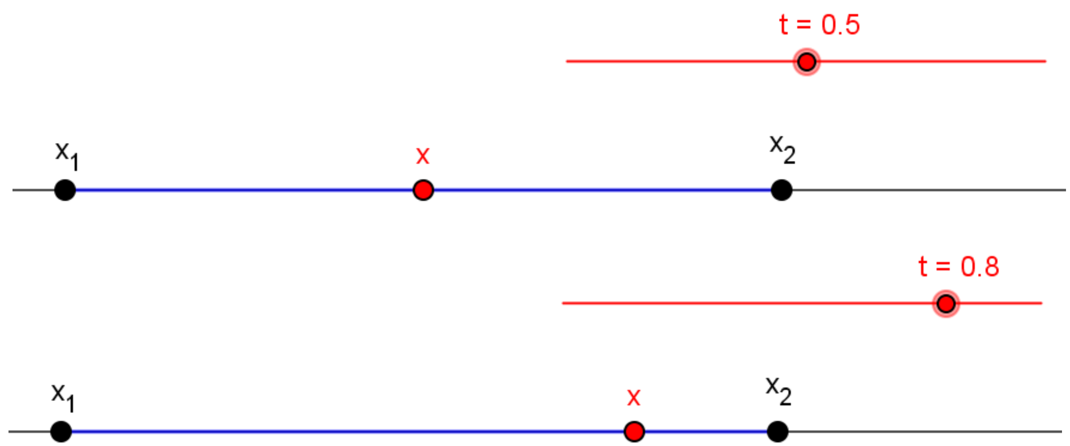
- ponovitev definicije konveksne funkcije



- primeri konveksnih funkcij:
    - kvadratna funkcija (vodilni koeficient?)
    - eksponentna funkcija (vedno?)
    - logaritemska funkcija (osnova?)
    - potenčna funkcija s celim eksponentom (stopnja?)

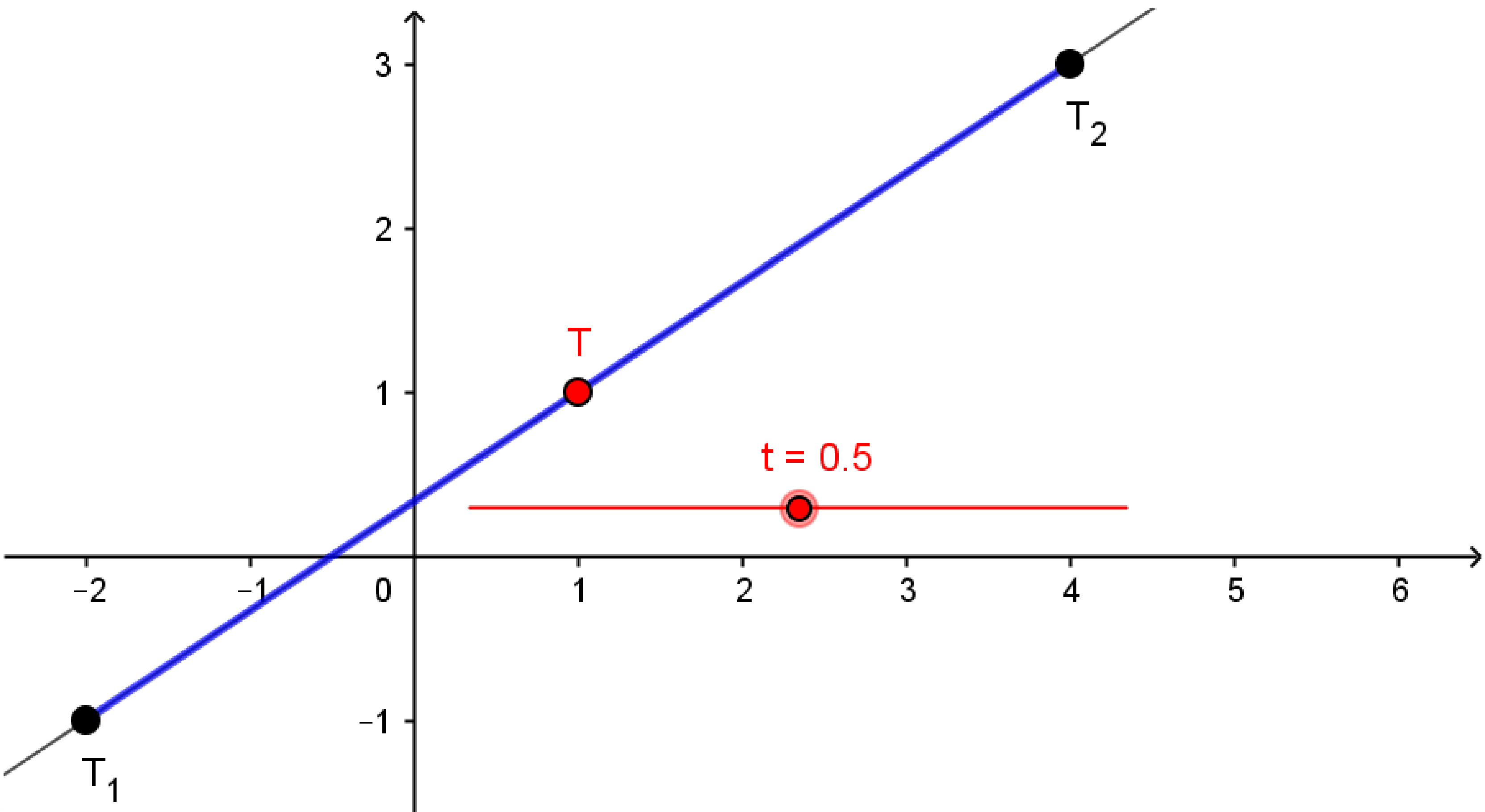
Osnovni pojmi

- **enačba daljice** na realni osi s krajiščema v x_1 in x_2: $x = (1-t)x_1 + t \cdot x_2,\ t \in [0,1]$

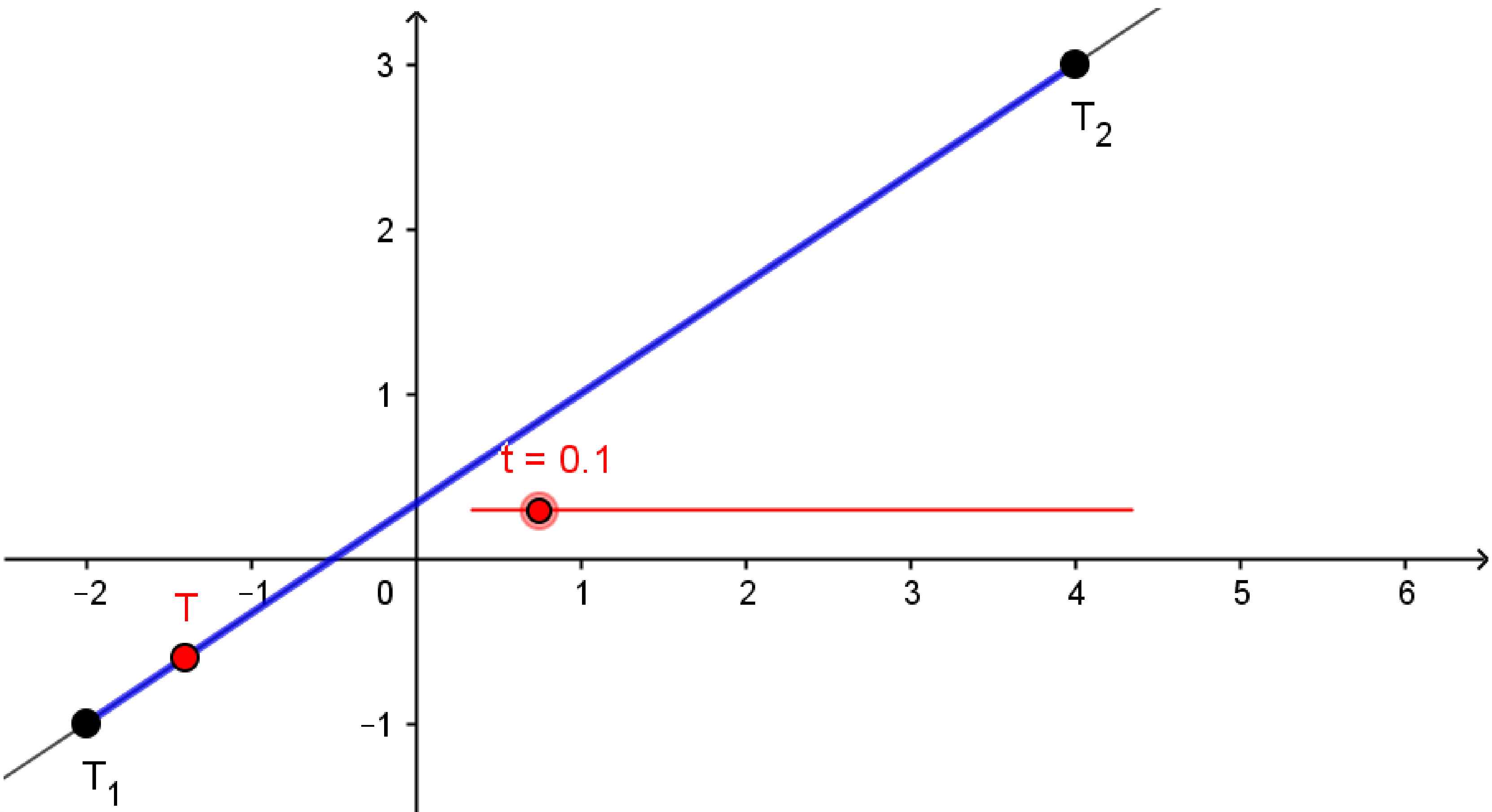


- pomoč v GeoGebri: $x_1=x(A)$, $x_2=x(B)$

Daljica v ravnini - GeoGebra



Daljica v ravnini - GeoGebra



Enačba daljice v ravnini

- enačba premice skozi $A(x_1,y_1)$ in $B(x_2,y_2)$

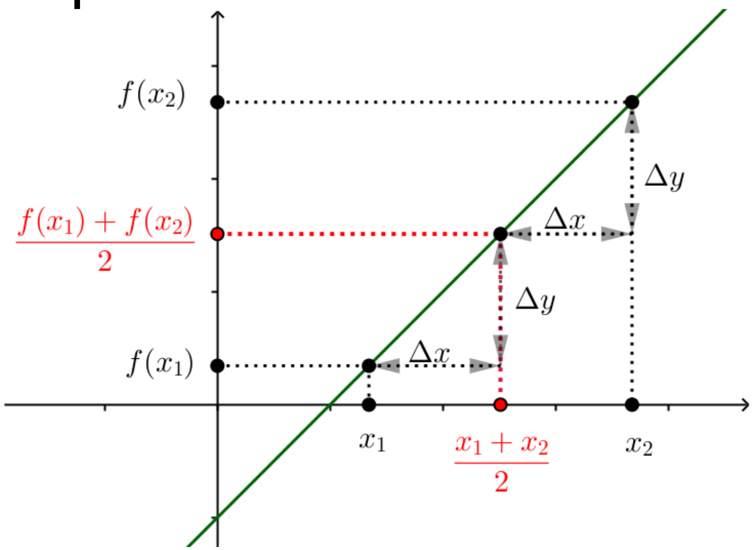
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- izrazijo *y:* $y = \left(1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) \cdot y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot y_2$

- substitucija ulomka s *t:* $y = (1 - t) \cdot y_1 + t \cdot y_2$

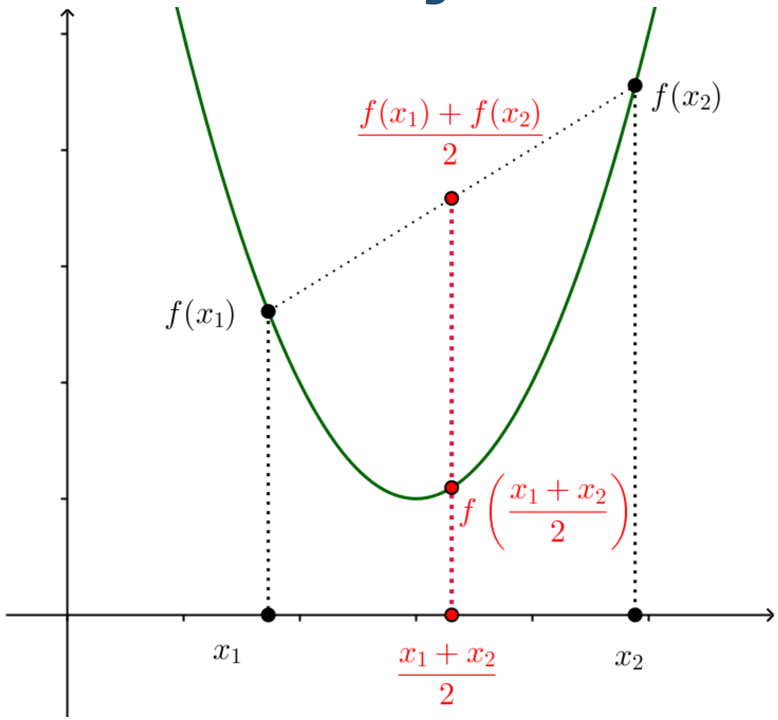
Elementarne funkcije in njihove slike povprečne vrednosti

- grafično in računsko raziskovanje vrednosti funkcije
- linearna funkcija:
  - analitično – eksplicitna oblika
  - grafično



Kvadratna funkcija

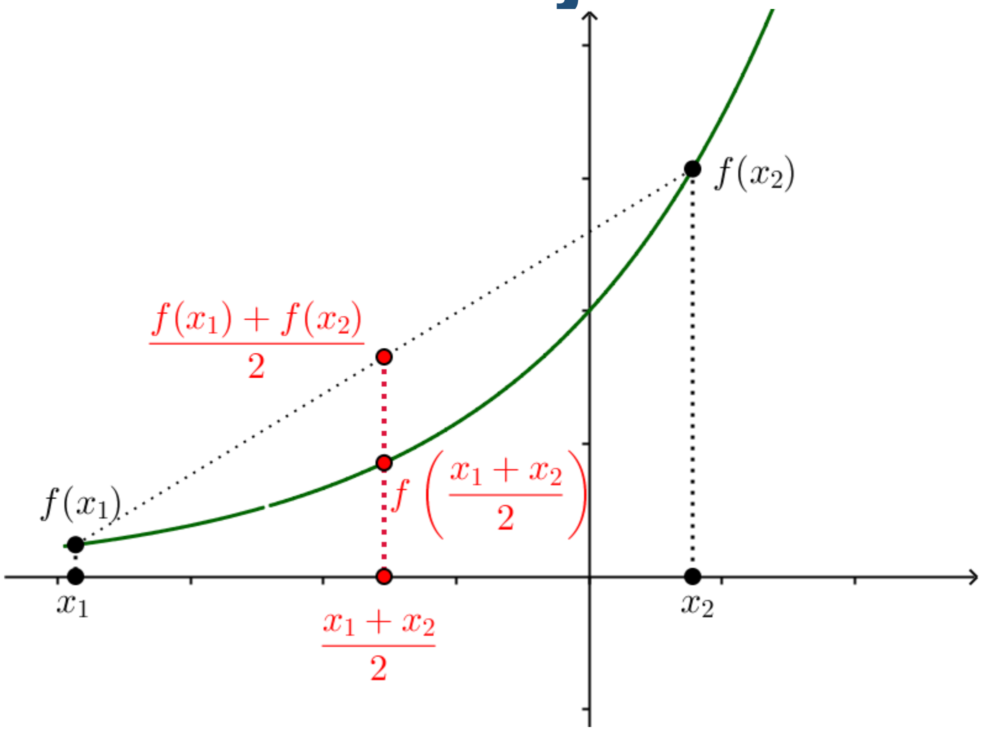
- grafično



- neenačba za *f(x)=x*²: $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \le \frac{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}{2}$

Eksponentna funkcija

- grafično

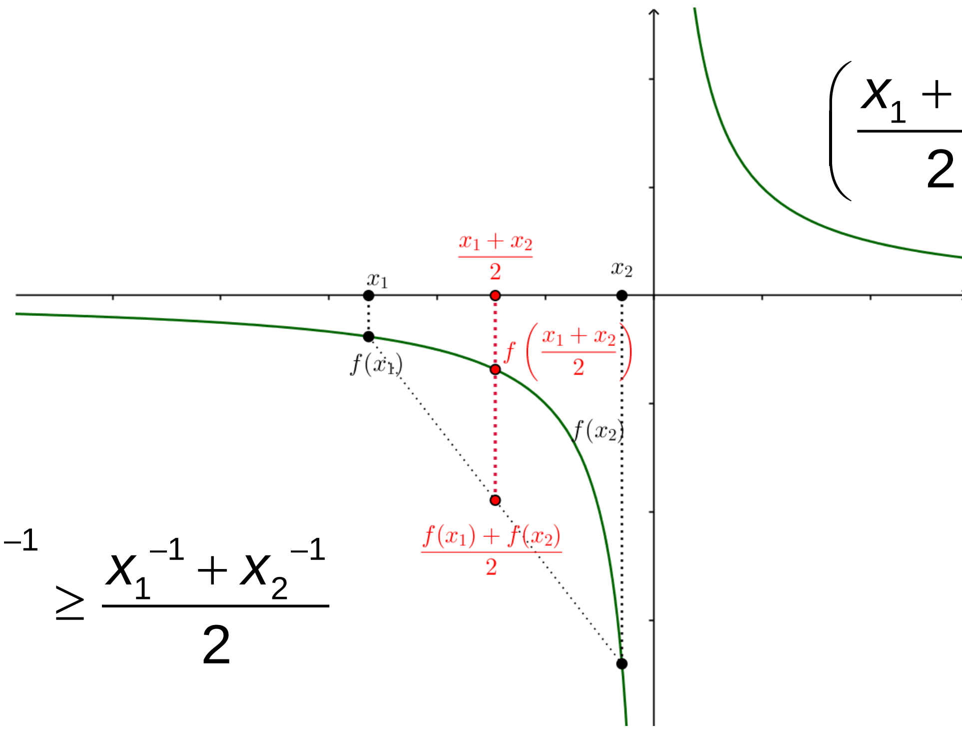


- neenačba za $f(x)=a^x$: $a^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}$

Ostale neenačbe

- potenčna funkcija $f(x)=x^{-1}$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{-1} \le \frac{x_1^{-1}+x_2^{-1}}{2}$$



$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{-1} \ge \frac{x_1^{-1}+x_2^{-1}}{2}$$

Jensenova neenakost

- Vrednost konveksne funkcije v povprečni vrednosti dveh realnih števil je kvečjemu enaka povprečju funkcijskih vrednosti teh dveh števil.

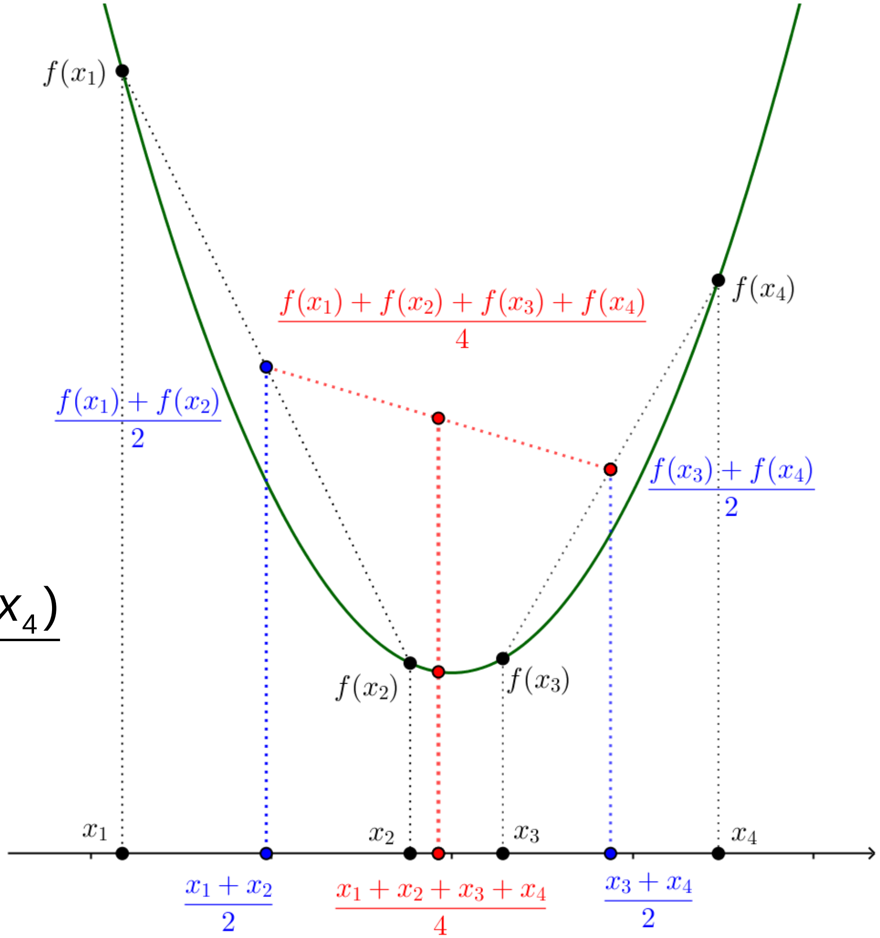
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

- Obrat neenačaja – konkavna funkcija (dijaki sami)

Izpeljava klasične definicije

- Jensenova neenakost za n=4:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}$$



Izpeljava klasične definicije

- posplošitev: $f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \le \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$
- najhitrejši za n=8
- ideja dokaza, če je *n* potenca števila 2
- izpeljavi v primeru *n*=3 in *n*=5

Izpeljava klasične definicije

- *za n*=3 *uporabimo povprečje* 4 *števil*
  - manjkajočega definiramo: $x_4 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$
  - preverimo: $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \dfrac{1}{4}\left(x_1 + x_2 + x_3 + \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) = \dfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$
  - izračunamo: $f\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \leq \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4} =$
    $= \dfrac{1}{4}\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)\right)$
  - preoblikujemo: $f\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \leq \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}$

Izpeljava klasične definicije

- *za n=5 uporabimo povprečje 8 števil*
  - manjkajoče tri definiramo kot povprečje petih

$$x_6 = x_7 = x_8 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

- *zadnji del skupnega dokaza*
  - definiramo: $x_1^* = x_1 = \mathrm{L} = x_k,\ x_2^* = x_{k+1} = \mathrm{L} = x_n$
  - dobimo: $f\left(\frac{kx_1^* + (n-k)x_2^*}{n}\right) \le \frac{kf(x_1^*) + (n-k)f(x_2^*)}{n}$
  - $t = \frac{k}{n} : f\left(tx_1^* + (1-t)x_2\right) \le t \cdot f(x_1^*) + (1-t) \cdot f(x_2^*)$
  - Graf leži pod zveznico točk.

Za konec

- Ali je število *t* res med 0 in 1?

- Tako definirano število *t* je racionalno število. Za pokritje celotne daljice med danima krajiščema mora biti *t* realno število. Dokaz presega snov gimnazijskega izobraževanja.