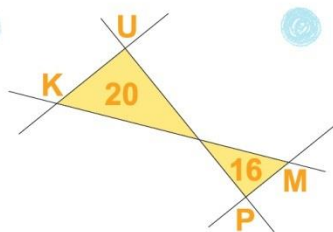




TEORIJA GRAFOV V SREDNJEŠOLSKEM IZOBRAŽEVANJU

Jasmina Ferme, dr. Boštjan Brešar, dr. Alenka Lipovec

Fakulteta za naravoslovje in matematiko ter Pedagoška fakulteta, Univerza v
Mariboru



3. mednarodna konferenca
o učenju in poučevanju matematike
KUPM 2016



REPUBLIKA SLOVENIJA
**MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT**

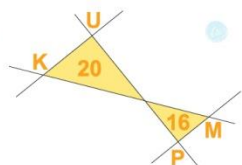


EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

TEORIJA GRAFOV

Leonhard Euler in problem sedmih mostov mesta Königsberg.

Ali se lahko sprehodimo po mestu tako, da prečkamo vsak most natanko enkrat in svojo pot zaključimo tam, kjer smo začeli?



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo

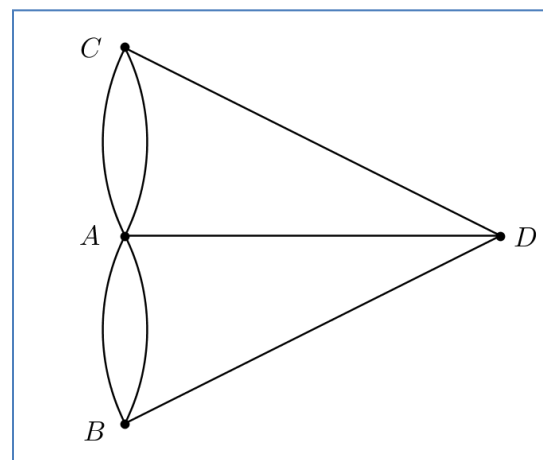
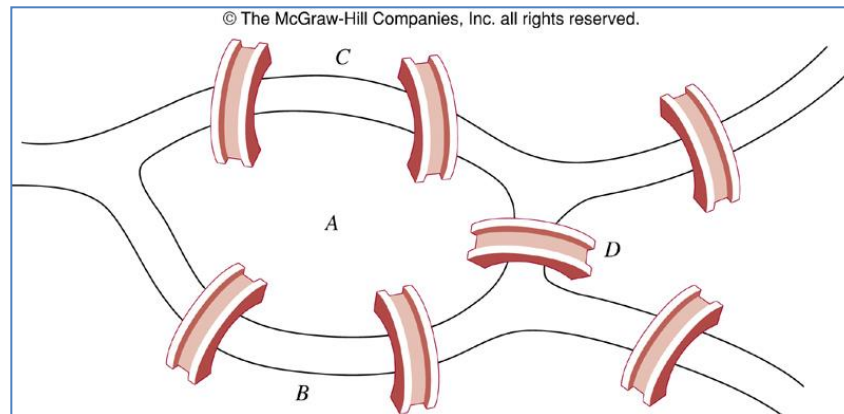


REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



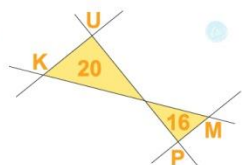
EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

GRAFI



Graf sestavljata:

- množica vozlišč in
- množica povezav.



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



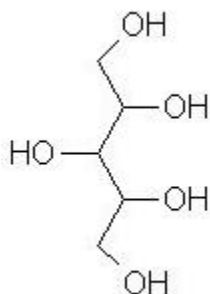
REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



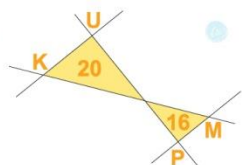
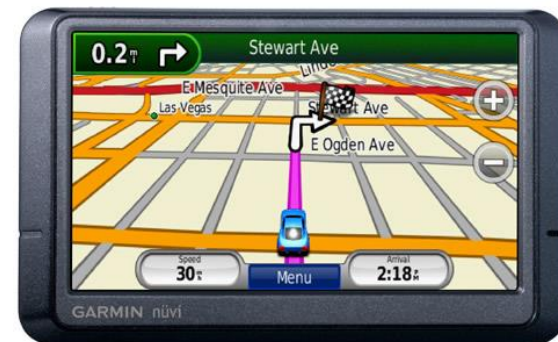
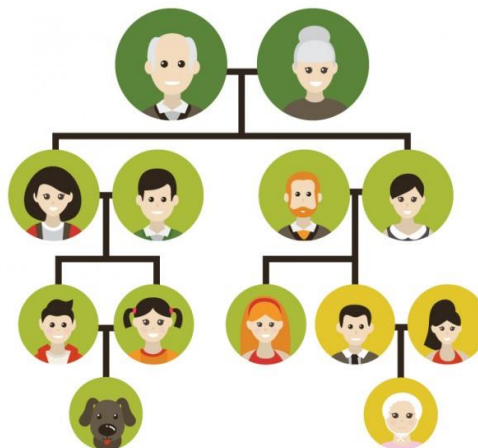
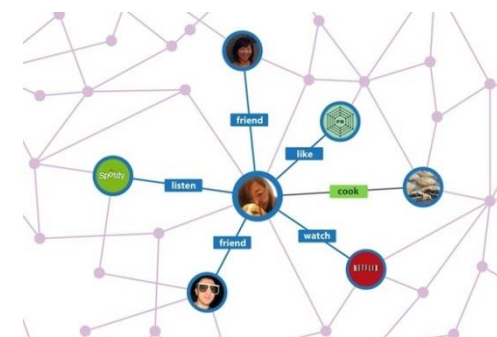
EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

IZJEMNO ŠIROK SPEKTER UPORABE TEORIJE GRAFOV

| Skupina | Časovni termin |
|----------------------|----------------|
| Osnovnošolci | 8.00-9.15 |
| Društvo 1 | 8.00-9.30 |
| Dijaki 1 | 9.00-10.15 |
| Dijaki 2 | 9.00-10.30 |
| Poslovni partnerji 1 | 9.45-11.30 |
| Poslovni partnerji 2 | 10.00-12.30 |
| Predstavniki občine | 11.00-12.30 |
| Društvo 2 | 11.00-12.45 |
| Studentski klub | 12.00-14.00 |



| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | |
| 2 | | | |
| | | | 3 |
| | 2 | 1 | |



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



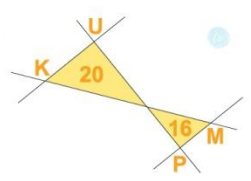
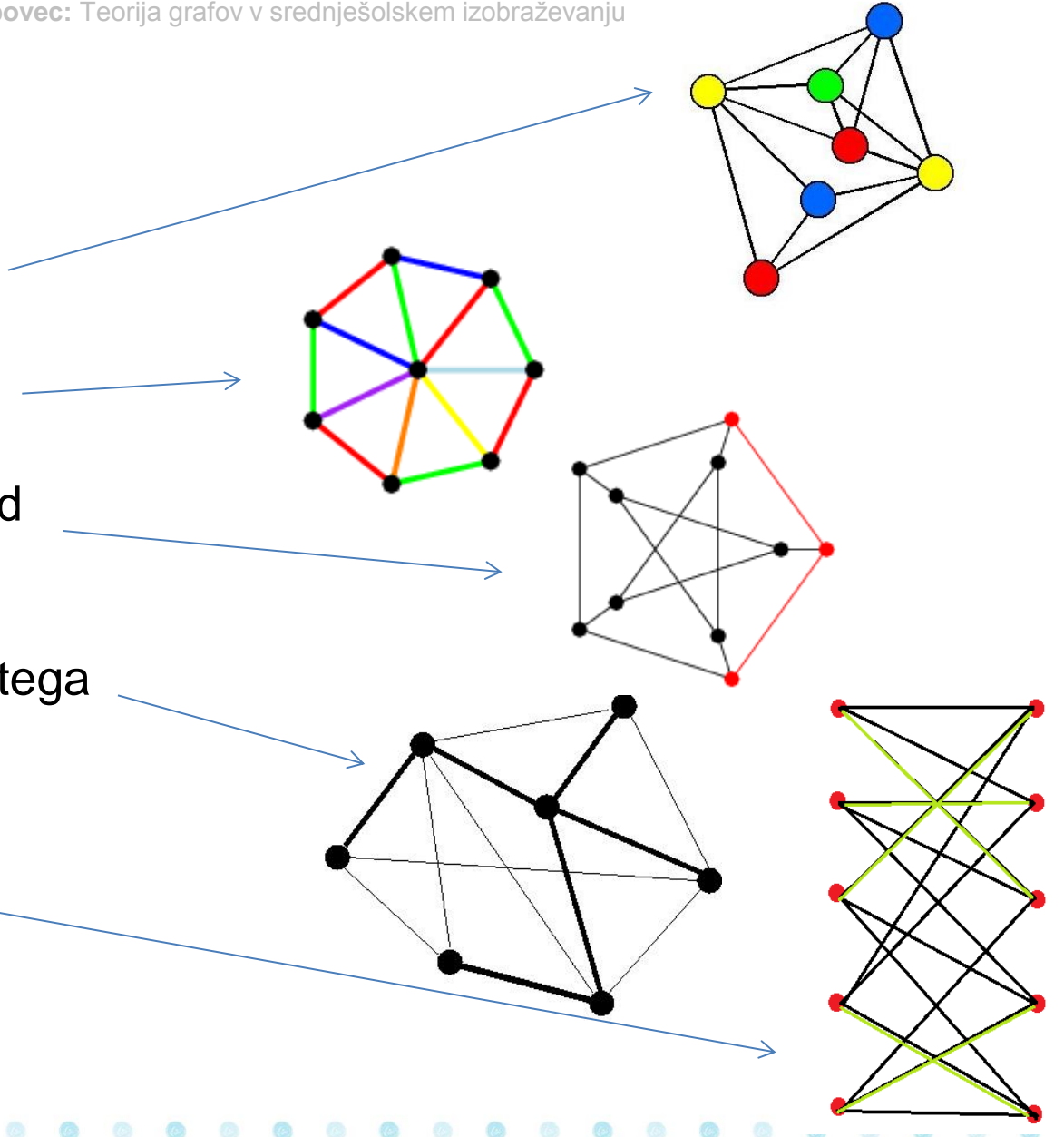
REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SKLAD
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

DELO Z GRAFI

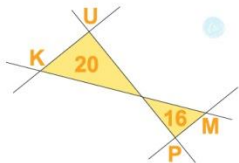
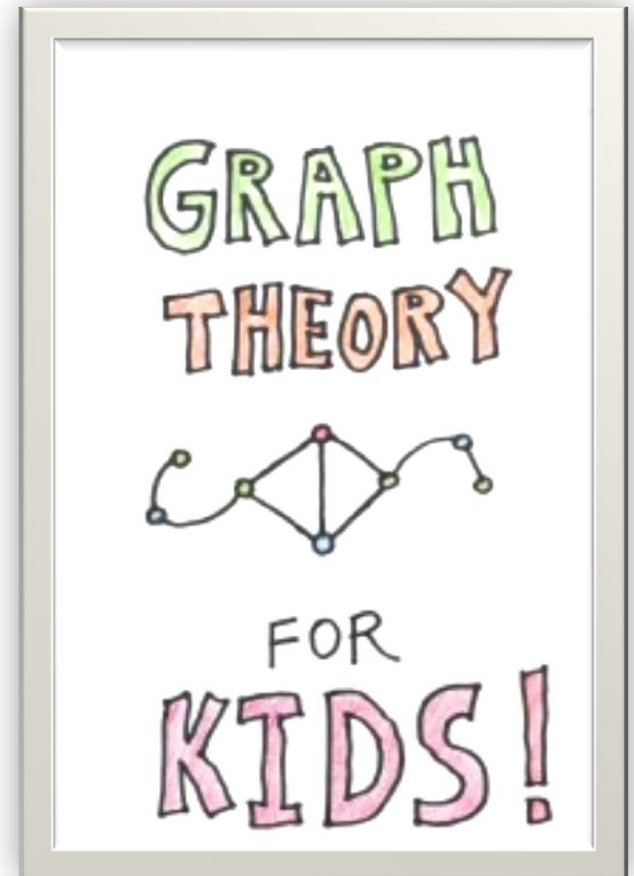
- Barvanje vozlišč grafa;
- barvanje povezav grafa;
- iskanje najkrajše poti med dvema vozliščema;
- iskanje minimalnega vpetega drevesa;
- prirejanja;
- ...



KUPM 2016

ZAKAJ POUČEVATI TEORIJU GRAFOV V OSNOVNIH IN SREDNJIH ŠOLAH?

1. Možnost prikaza uporabnosti teorije grafov in s tem celotne matematike.
2. Povečanje motiviranosti dijakov za učenje matematike.
3. Uresničevanje splošnih ciljev iz učnih načrtov.
4. Razvoj matematične in drugih kompetenc.



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



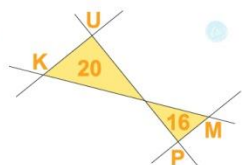
EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

KLJUB TEMU ...

... in možnosti bogatitve učnega procesa preko poučevanja vsebin s področja teorije grafov pa ugotavljamo, da je le-to v osnovnih in srednjih šolah zastopano v manjši meri.

- Poučevanje teorije grafov poteka predvsem na univerzah;
- le nekatere izbrane vsebine zasledimo tudi v osnovnih in srednjih šolah:
 - interesne dejavnosti,
 - priprave na tekmovanja,
 - raziskovalne naloge ...

RAZLOG: vsebin s področja teorije grafov ne zasledimo v učnih načrtih za matematiko v osnovnošolskem in srednješolskem izobraževanju.



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SKLAD
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

V PRISPEVKU PODOJAMO PRIMER OBRAVNAVE IZBRANIH VSEBIN S PODROČJA TEORIJE GRAFOV

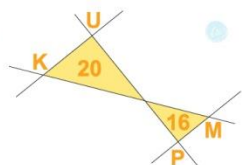
Namenjen je predvsem gimnazijskim učiteljem.

Prispevek lahko učiteljem služi kot:

- vir idej za izvedbo učne ure,
- vir idej za izvedbo interesne ali projektne dejavnosti,
- vir idej za pripravo raziskovalne naloge,
- gradivo za samoizobraževanje ali podobno.



Služi lahko kot pripomoček pri pripravi dejavnosti, ki bogatijo proces učenja.



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



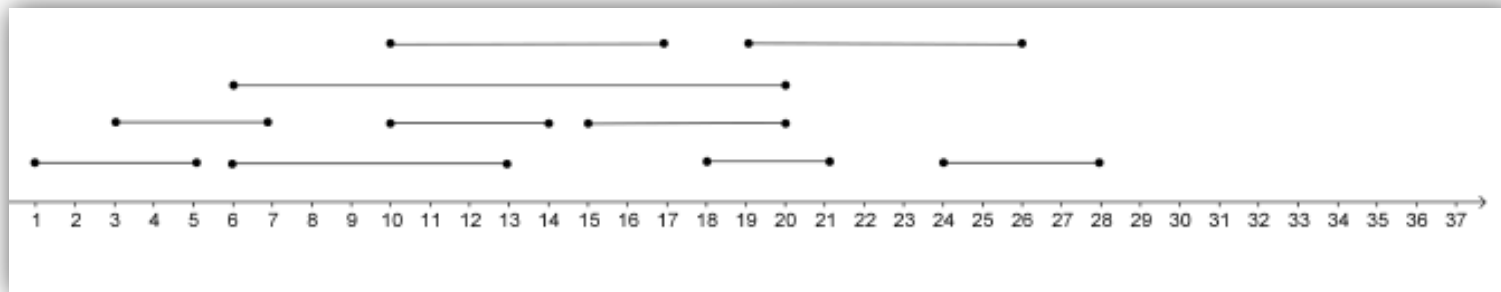
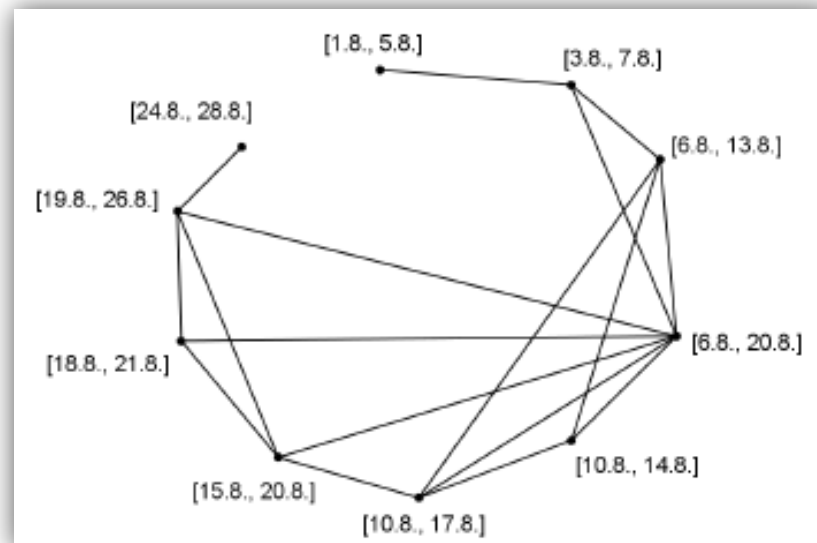
REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

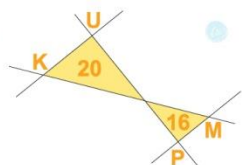
VSEBINE S PODROČJA TEORIJE GRAFOV, ZAJETE V PRISPEVKU

- Uvod v teorijo grafov,
- Barvanje vozlišč grafov,
- Tetivni grafi,
- Grafi intervalov ter
- sklop, ki združuje navedene vsebine.



V PRISPEVKU OPISANI POTEK UČNEGA PROCESA IMA NASLEDNJE LASTNOSTI

1. Usmerjen je k uresničevanju **splošnih ciljev in kompetenc**, navedenih v učnih načrtih za matematiko v gimnazijskem izobraževanju.
2. Usmerjen je k uresničevanju nekaterih elementov **matematične kompetence in drugih kompetenc**.
3. Upošteva **učna načela** postopnosti, sistematičnosti, nazornosti, znanstvenosti, aktualnosti, racionalnosti, povezovanja teorije in prakse.



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo

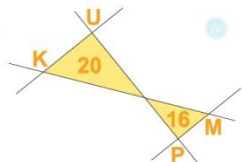


REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SKLAD
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

4. Osnovan je na način, ki dijake spodbuja k **aktivnemu sodelovanju in izgradnji znanja**.
5. Vključuje pristope, ki pripomorejo k **motiviranju dijakov** (kognitivni konflikt, učenje preko problemskih situacij).
6. Navedeni vsebinsko-metodični napotki, ki jih navajamo v prispevku, so **izbrani in izpopolnjeni tudi na podlagi izkušenj, dobljenih tekom poučevanja navedenih vsebin**.



KUPM 2016

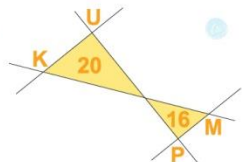
KROŽEK IZ TEORIJE GRAFOV

- I. gimnazija v Celju;
- krožek, namenjen dijakom vseh letnikov;
- pet srečanj po dve šolski uri;
- povprečna udeležba na srečanju: devetnajst dijakov.

Raziskava ni pokazala pozitivnih vplivov poučevanja teorije grafov na nivo znanja splošne matematike.

Omejitve raziskave:

1. premajhno število udeležencev raziskave;
2. le 10 šolskih ur izvajanja krožka.



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT

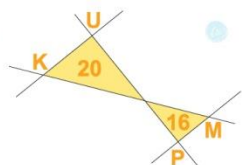
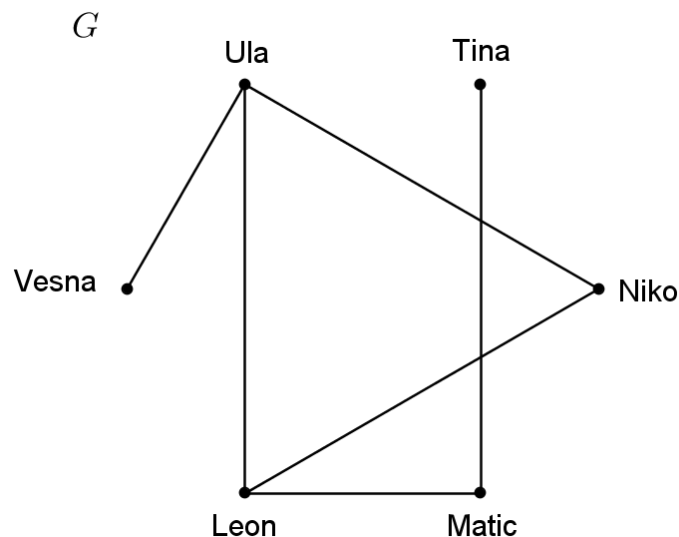


EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SKLAD
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

PRIMERI NALOG, KI SO JIH DIJAKI REŠEVALI TEKOM KROŽKA

1. Naloga 1. Leon, Matic, Niko, Tina, Ula in Vesna živijo v Celju. Leon, Niko in Ula so sošolci. Tina veliko prostega časa preživi z Maticem. Ta trenira košarko skupaj z Leonom, Vesna in Ula pa plešeta v isti plesni skupini. Situacijo predstavite z grafom, katerega vozlišča naj predstavljajo posamezne osebe, povezave pa naj ponazarjajo navedena poznanstva med njimi.

Sklop: Uvod v teorijo grafov.



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SKLAD
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

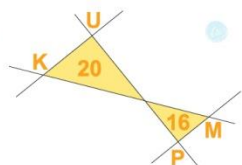
2. Vprašanje 2.9 *Ali obstaja 3-regularen graf na 7 vozliščih?*

Vprašanje 2.10 *Ali obstaja k -regularen graf na n vozliščih, kjer sta k in n lihi naravni števili?*

Sklop: Uvod v teorijo grafov.

Odgovor na vprašanji.

3-regularen graf na 7 vozliščih ne obstaja, saj je vsota stopenj vseh vozlišč poljubnega grafa po lemi o rokovanju sodo število, za 3-regularen graf na 7 vozliščih pa to ne drži. Tudi k -regularen graf na n vozliščih, kjer sta k in n lihi naravni števili, ne obstaja. Vsota stopenj vseh vozlišč takega grafa je namreč liho število, kar je v nasprotju z lemo o rokovanju, katere posledica je tudi ta, da je vsota stopenj vseh vozlišč poljubnega grafa sodo število.



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

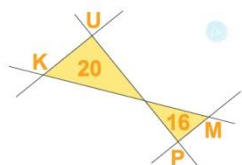
3.

Uvodni problem: Izbirni predmeti za sedmošolce.

Slovenske osnovne šole morajo v pouk za učence 7., 8. in 9. razreda poleg izvajanja obveznih predmetov vključiti tudi izvajanje izbirnih predmetov. Tako učencem najprej ponudijo več možnih izbirnih predmetov, izvajajo pa le tiste, za katere se je odločila dovolj veliko skupina osnovnošolcev. Učenci, ki so izbrali predmete, ki se ne bodo izvajali, izberejo druge predmete. V eni izmed celjskih osnovnih šol bodo tako za učence 7. razredov izvajali naslednje izbirne predmete: nemščino, italijanščino, računalništvo, likovno snovanje 1, literarni klub, izbrani šport, šport za sprostitev, raziskovanje domače okolice in sodobno pripravo hrane. Najmanj koliko različnih terminov izvajanja izbirnih predmetov morajo vključiti v urnik, da bodo vsi učenci lahko obiskovali vse izbrane predmete, če določeni predmeti zaradi izbire učencev ne smejo potekati istočasno? Predmeti, ki ne smejo potekati istočasno so navedeni v Tabeli [2.1](#).

Sklop: Barvanje vozlišč grafov.

| Izbirni predmet | Predmeti, ki ne smejo potekati istočasno s tem izbirnim predmetom |
|-----------------------------|--|
| nemščina | Računalništvo, likovno snovanje 1, literarni klub izbrani šport, šport za sprostitev, raziskovanje domače okolice, sodobna priprava hrane. |
| italijanščina | Računalništvo, likovno snovanje 1, literarni klub, šport za sprostitev, raziskovanje domače okolice, sodobna priprava hrane. |
| računalništvo | Nemščina, italijanščina, likovno snovanje 1, izbrani šport, šport za sprostitev. |
| likovno snovanje 1 | Nemščina, italijanščina, računalništvo, šport za sprostitev, raziskovanje domače okolice. |
| literarni klub | Nemščina, italijanščina, šport za sprostitev, sodobna priprava hrane. |
| izbrani šport | Nemščina, računalništvo, šport za sprostitev. |
| šport za sprostitev | Nemščina, italijanščina, računalništvo, likovno snovanje 1, literarni klub, izbrani šport, raziskovanje domače okolice. |
| raziskovanje domače okolice | Nemščina, italijanščina, likovno snovanje 1, šport za sprostitev. |
| sodobna priprava hrane | Nemščina, italijanščina, literarni klub. |



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI
SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

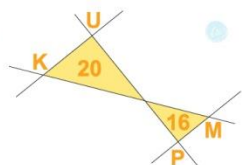
4. Naloga 7. Pobarvajte zemljevid držav Južne Amerike, prikazan na spodnji sliki, tako, da poljubni sosednji državi prejmeta različni barvi. Koliko barv ste uporabili?

Vprašanje 2.18 Ali so za barvanje poljubnega zemljevida dovolj štiri barve, če želimo takšno barvanje, da poljubni sosednji državi/regiji/pokrajini prejmeta različni barvi?

Sklop: Barvanje vozlišč grafov.

Rešitev naloge:
Uporabili smo 4 barve.

Odgovor na vprašanje:
Da.



KUPM 2016

5.

Naloga 8. Sudoku kot primer grafa.

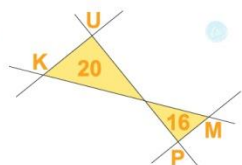
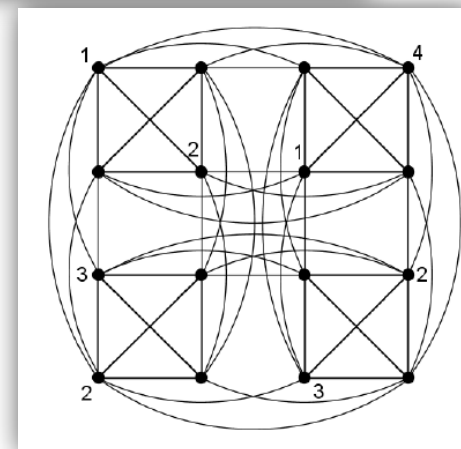
Rešite Sudoku.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | 4 |
| | 2 | 1 | |
| 3 | | | 2 |
| 2 | | 3 | |

Slika 2.37: Sudoku iz naloge 8 (Vir : <http://www.studyvillage.com/attachments/4100-x4-Sudoku-2>)

Sklop: Barvanje vozlišč grafov.

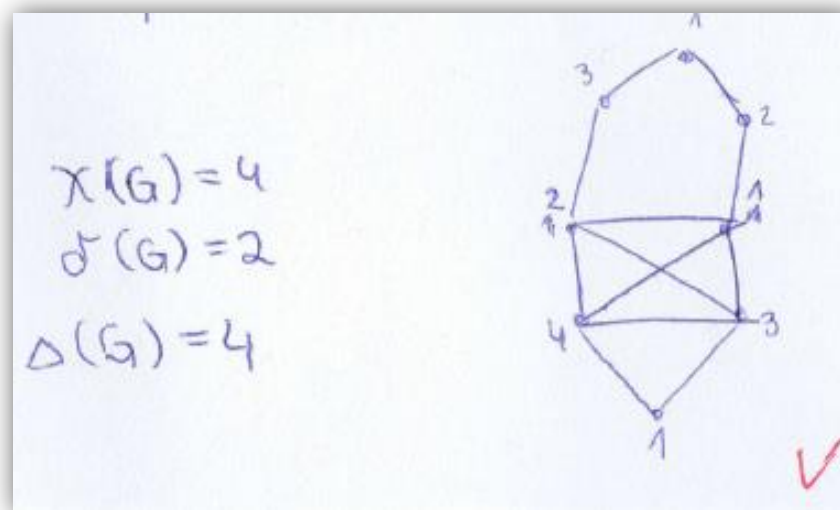
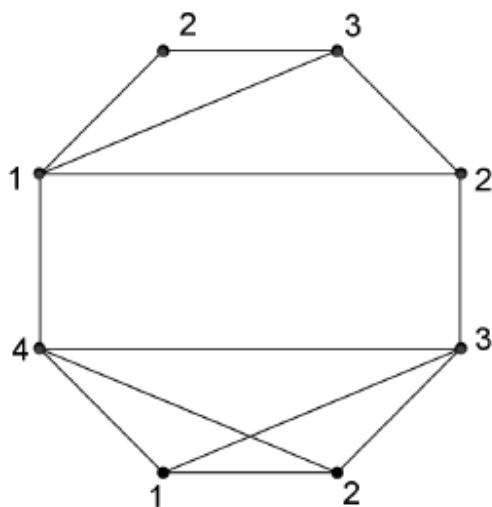
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 4 |
| 4 | 2 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 4 | 2 |
| 2 | 4 | 3 | 1 |



KUPM 2016

6. Naloga 2. Konstruirajte povezani, popolni graf na osmih vozliščih, za katerega bo $\chi(G) = 4$, $\delta(G) = 2$ in $\Delta(G) = 4$.

Sklop: Tetivni grafi.

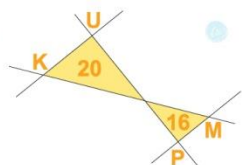
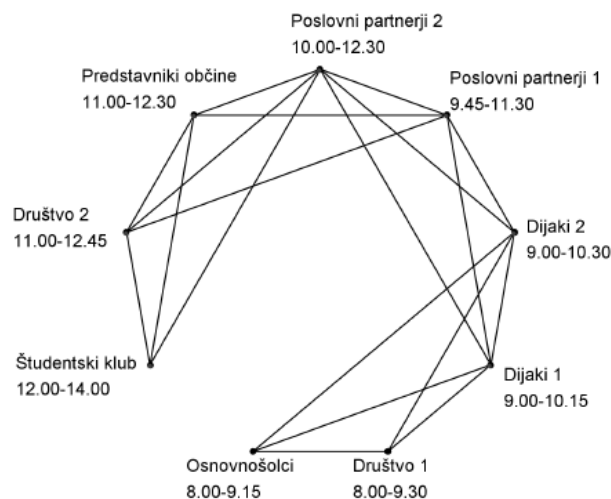


7. Naloga 3. V podjetju imajo dan odprtih vrat, ki se ga bo udeležilo devet izbranih skupin ljudi. Skupine bodo podjetje obiskale v določenih časovnih terminih, različnih glede na njihove zmožnosti in želje, kar je prikazano v Tabeli 2.5.

- Predstavite situacijo z grafom.
- Določite $\Delta(G)$, $\delta(G)$ in $\omega(G)$.
- Najmanj koliko oseb, ki bo predstavilo podjetje, potrebujejo, če bo vsaki skupini podjetje predstavljala ena oseba?
- Kdaj bo v podjetju največ skupin?
- Ali narisani graf premore asteroidno trojko?
- Ali je narisani graf tetiven?
- Ali je narisani graf graf intervalov?

| Skupina | Časovni termin |
|----------------------|----------------|
| Osnovnošolci | 8.00-9.15 |
| Društvo 1 | 8.00-9.30 |
| Dijaki 1 | 9.00-10.15 |
| Dijaki 2 | 9.00-10.30 |
| Poslovni partnerji 1 | 9.45-11.30 |
| Poslovni partnerji 2 | 10.00-12.30 |
| Predstavniki občine | 11.00-12.30 |
| Društvo 2 | 11.00-12.45 |
| Študentski klub | 12.00-14.00 |

Sklop:
Grafi intervalov.



KUPM 2016

8.

3. Kako imenujemo množico vseh sosedov izbranega vozlišča?

Soseščina vozlišča.

4. Ali sta grafa K_4 in W_3 izomorfna?

Da.

5. Ali drži trditev, da imata dani graf in njegov poljubni vpeti podgraf enako število vozlišč?

Da.

10. Kaj pravi Brooksov izrek?

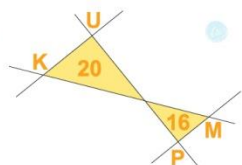
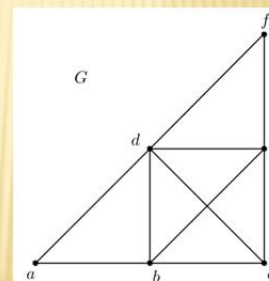
Če je G povezani graf, ki ni niti polni graf niti lihi cikel, tedaj je njegovo kromatično število manjše ali enako največji stopnji vozlišč tega grafa.

Sklop:
Barvanje vozlišč
grafov, tetivni grafi
in grafi intervalov.

9. VPRAŠANJE

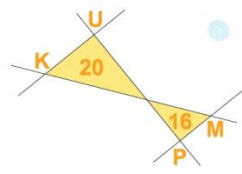
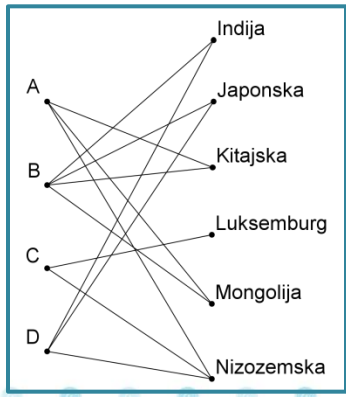
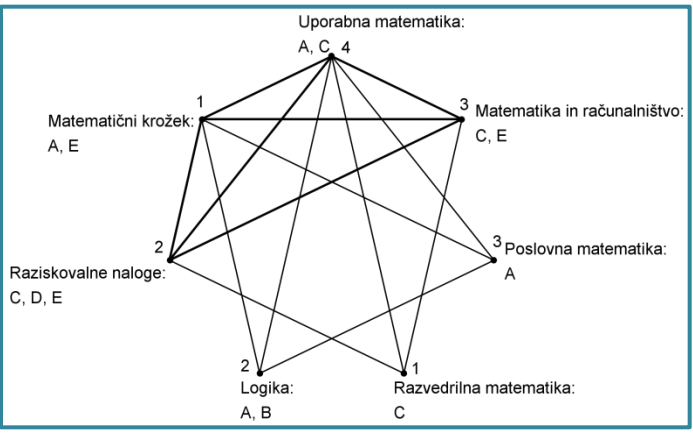
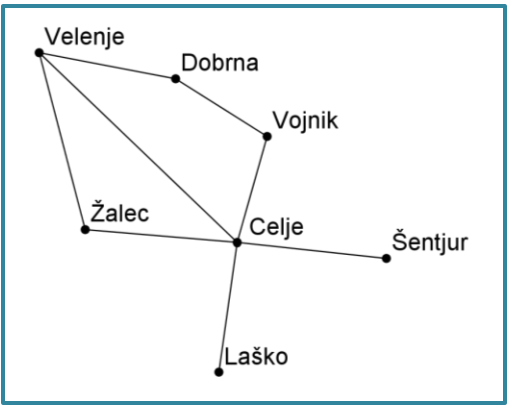
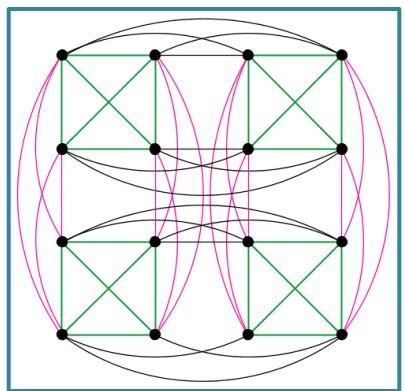
Katero izmed vozlišč b , c , d , e je simplicialno v grafu G ?

- A Vozlišče b .
- B Vozlišče c .
- C Vozlišče d .
- D Vozlišče e .



KUPM 2016

HVALA ZA POZORNOST!



KUPM 2016