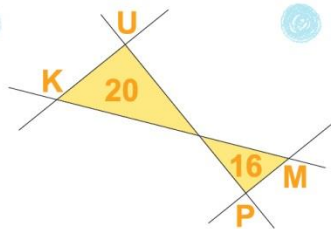




# Avtentična naloga iz določenega integrala

**Mitja Bončina**

Gimnazija in srednja šola Kočevje



3. mednarodna konferenca  
o učenju in poučevanju matematike

**KUPM 2016**



REPUBLIKA SLOVENIJA  
**MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT**



EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI SKLAD  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

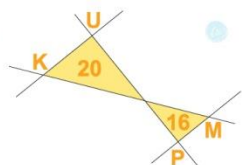
Na delavnici na šoli smo ugotovili, da je potrebno pouk usmeriti k aktivnim in avtentičnim oblikam.

Kot novost smo uvedli avtentične naloge.

Vsak učitelj je v šolskem letu 2015/16 pripravil po eno avtentično nalogo po principu vzratnega načrtovanja (Understanding by design, krajše UBD) v obsegu 10 % letnih ur pri posameznem predmetu.

Posebnost - dijaki so se odločili, ali se jim naloga oceni ali ne.

V šolskem letu 2016/17 ocena avtentične naloge nadomesti vsaj 40 % ocene enega izmed pisnih ocenjevanj.



**KUPM 2016**



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



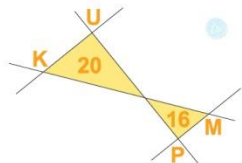
REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI SKLAD  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

## Avtentična naloga:

- Dijak v vlogi živilskega tehnologa za znani lokal testira pomaranče in limone na tržišču;
- ugotovi povezavo med velikostjo sadeža in količino iztisnjene soka;
- lokalu svetuje o najbolj smiselnem nakupu sadja, tako da bo iz nakupljenega sadja lahko pridobil največ sveže iztisnjene soka.



**KUPM 2016**



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT



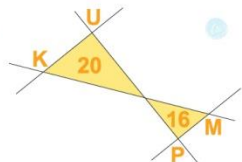
EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI SKLAD  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

# Princip UBD (Understanding by design)

## Vira:

1. Grant, W., McTighe, J. (2005): Understanding By Design  
2nd Expanded Edition, ASCD, Alexandria,

1. mag. Kamšek, M. : Do razumevanja z načrtovanjem, interno  
gradivo (priredba zgornjega vira).



**KUPM 2016**



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT

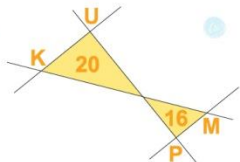


EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

## FAZA 1: Določitev pričakovanih dosežkov

Razmišljamo o pričakovanih rezultatih:

- katere dolgoročne transferne cilje želimo doseči;
- do katerih spoznanj naj bi prišli dijaki;
- katera bistvena vprašanja bodo raziskovali;
- katera znanja in spretnosti bodo pridobili.



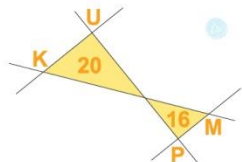
**KUPM 2016**

## Transforni cilji:

Dijaki znajo izračunati:

- ploščino lika, omejenega z grafi dveh ali več funkcij,
- volumen rotacijskega telesa

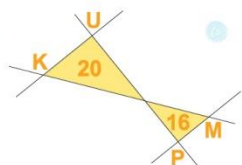
in znajo pridobljeno znanje uporabiti v realnih situacijah.



**KUPM 2016**

## Bistvena vprašanja:

- Volumne katerih teles že znamo izračunati?
- Kakšne so skupne lastnosti teh teles?
- Za katera telesa ne znamo izračunati volumna?
- Kako bi izmerili volumne različnih sadežev? Opiši pripomočke in postopek.
- Ali znamo izračunati volumne različnih sadežev?
- Kdaj je to potrebno?
- Ali so izračuni čisto točni? Pojasni svoj odgovor.



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT

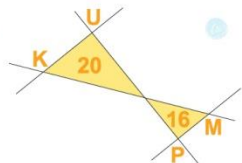


EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI SKLAD  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

## Razumevanje:

Dijaki bodo razumeli, da:

- se volumna nepravilnih teles ne da natančno izračunati;
- lahko volumne rotacijskih teles (stožca, krogle, valja) izpeljemo tudi s pomočjo integrala;
- je v matematiki integral edino orodje za približno računanje volumna nepravilnih rotacijskih teles;
- volumna poljubnih nerotacijskih teles ne moremo izračunati;
- obstajajo razlike pri izračunavanju volumna pravih in nepravilnih teles.



KUPM 2016



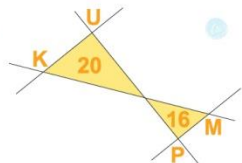
## Ključna znanja in veščine:

Dijaki bodo:

- vedeli, kaj je določeni integral;
- poznali osnovni izrek integralnega računa (Newton-Leibnizovo formulo);
- vedeli, kaj je rotacijsko telo;
- znali izračunati ploščino lika, omejenega z grafi funkcij;
- znali izračunati volumen rotacijskega telesa.

Dijaki bodo zmožni:

- izračunati določeni integral dane zvezne funkcije;
- izračunati ploščino lika, omejenega z grafi funkcij;
- izračunati volumen rotacijskega telesa.

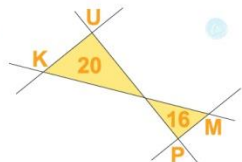


**KUPM 2016**

## FAZA 2: Določitev sprejemljivih dokazil

Razmišljamo, s čim bodo dijaki izkazali pridobljeno transferno znanje in razumevanje

- določimo avtentično nalogo;
- napišemo navodila in kriterije ocenjevanja;
- razmislimo še o drugih dokazilih znanja in razumevanja, kot so preverjanje med poukom in pisno ocenjevanje.



**KUPM 2016**



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



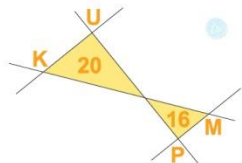
REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

## Naloga za izvedbo:

- vloga živilskega tehnologa;
- dijak izbere tri različne trgovine in v vsaki kupi po eno pomarančo in eno limono;
- izmeri pomaranče in limone;
- ustrezno izračuna volumen posameznega sadeža,
- iztisne sok iz sadja;
- izračuna volumski izkoristek sadeža;
- znanemu lokalu napiše nasvet glede nakupa.



**KUPM 2016**



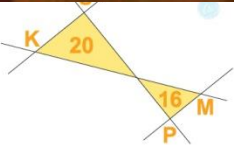
Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI SKLAD  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST



**KUPM 2016**



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT

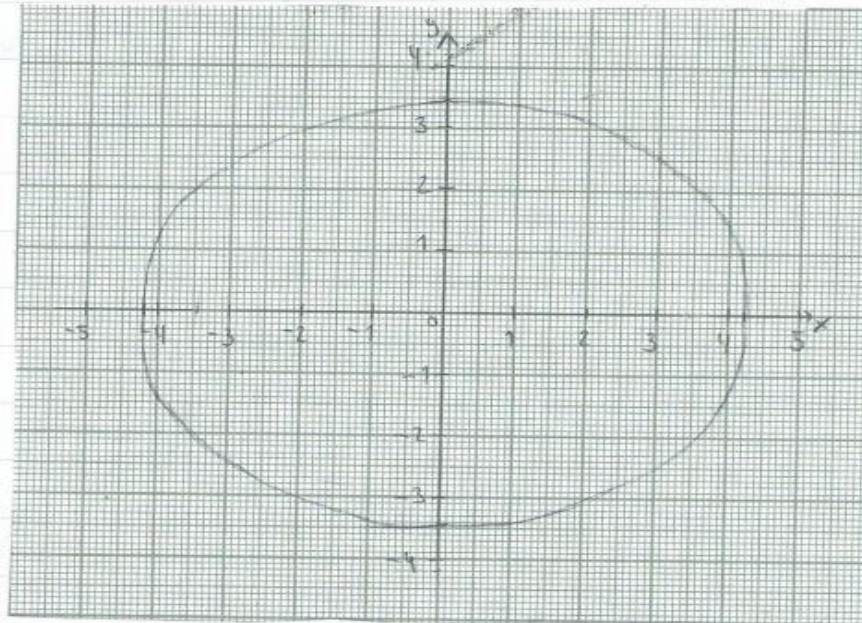


EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST





Limona M:

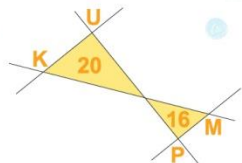


$$\text{enačba elipse limone M: } \frac{x^2}{17,64} + \frac{y^2}{11,9025} = 1$$

$$f(x) = \sqrt{11,9025 - \frac{11,9025x^2}{17,64}}$$

$$V = \pi \int_{-4,2}^{4,2} \left(11,9025 - \frac{11,9025x^2}{17,64}\right) dx = \pi \left(11,9025x - \frac{11,9025x^3}{52,92}\right) \Big|_{-4,2}^{4,2} =$$
$$= \pi \left(49,9905 - \frac{881,83242}{52,92}\right) \cdot 2 = \pi \left(\frac{3527,32968}{52,92}\right) = 209,4 \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi (3,45)^2 \cdot 4,2 = 209,4 \text{ cm}^3$$



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT

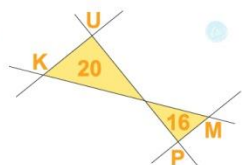


EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST



## FAZA 3: Načrt učne izkušnje

Zapišemo načrt poučevanja, ki logično izhaja in sledi ciljem iz 1. in 2. faze.



**KUPM 2016**



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



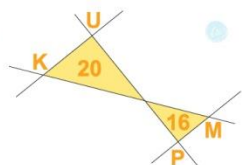
REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI SKLAD  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

**WHERE TO** je akronim, ki nam pomaga oblikovati logičen načrt učenja in vključiti vse ključne elemente:

- kam (**where**): zagotovite, da dijaki vidijo celotno sliko, znajo odgovoriti na vprašanja »Zakaj? / Čemu?«, karseda hitro spoznajo pričakovane končne dosežke
- zgrabite (**hook**): takoj potopite dijake v ideje in probleme učnega sklopa, vključi dijake v miselno provokativne izkušnje/izzive/vprašanja v središču sklopa
- opremite, izkusite (**equip, experience**): dijake opremite s potrebnimi orodji, viri, veščinami in informacijami, da lahko dosežejo želeno razumevanje in uspešno izpolnijo nalogo za izvedbo/končno nalogo
- ponovno premislite (**rethink**): povečajte razumevanje s spremembo zornega kota, sklepanjem, spodbijanjem predhodnih predpostavk, uvajanjem novih dokazov in idej, itd. Omogočite dijakom priložnosti za ponovni razmislek o velikih idejah in napredku in da pregledajo svoj izdelek
- ovrednotite (**evaluate**): zagotovite dijakom (diagnostično in formativno) povratno informacijo in priložnosti, da se sami ocenijo in prilagodijo
- naredite po meri (**tailor**): personalizirajte učenje s pomočjo diferenciacije navodil, nalog in ocenjevanja, ne da bi žrtvovali veljavnost ali doslednost pri izpolnjevanju predpisanega
- organizirajte (**organise**): načrtujte zaporedje dejavnosti, ki ustreza ciljem za razumevanje (npr. podvomite v zaporedje, ki ga predlaga učbenik; le-to je običajno pripeto na abstraktne teme)



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



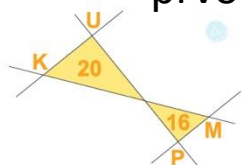
REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI SKLAD  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST



- Dijaki odgovorijo na bistvena vprašanja. (where, hook)
- Dijaki s pomočjo primerov v delovnem zvezku spoznajo definicijo določenega integrala. (equip)
- Dijaki spoznajo Osnovni izrek integralskega računa (Newton-Leibnizovo formulo). (equip)
- Dijaki računajo določene integrale različnih funkcij. (experience, rethink)
- Dijaki spoznajo geometrijski pomen določenega integrala. (equip)
- Dijaki računajo ploščino med krivuljo in osjo  $x$ . (experience, rethink)
- Dijaki računajo ploščino lika, omejenega z grafoma dveh ali več funkcij. (experience, rethink)
- Dijaki spoznajo formulo za računanje prostornine vrtenine (lik na intervalu  $[a,b]$  med grafom funkcije in osjo  $x$  zavrtimo okrog osi  $x$  za kot  $360^\circ$ ). (equip)
- Dijaki računajo prostornine geometrijskih teles (valja, stožca) in vrtenin nepravilnih oblik. (experience, rethink)
- Dijaki izberejo različno veliko sadje (pomaranče in limone) v različnih trgovinah. (tailor)
- Dijaki po navodilih izmerijo kupljeno sadje, pri tem fotografirajo postopek in pripomočke. (experience)
- Dijaki izdelajo končni izdelek – avtentično nalogo. (explore, tailor, organise)
- Dijaki ponovno odgovorijo na bistvena vprašanja, odgovore primerjajo s svojimi prvotnimi odgovori in vrednotijo lasten napredek. (rethink, evaluate)



**KUPM 2016**



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



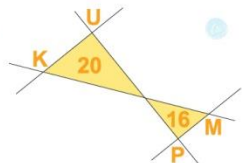
REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT



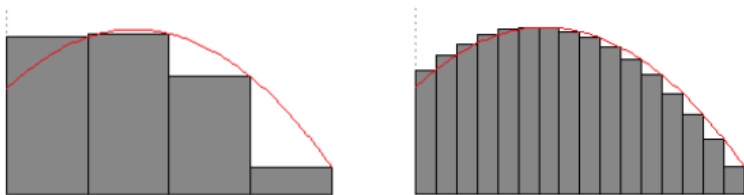
EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI SKLAD  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Delovni zvezek za dijake, ki je načrt za učenje:

- cilj naloge;
- bistvena vprašanja kot motivacija;
- učna snov;
- naloge za pogled na problem z drugega stališča;
- avtentična naloga in navodila za izvedbo;
- kriteriji ocenjevanja;
- ponovno bistvena vprašanja.

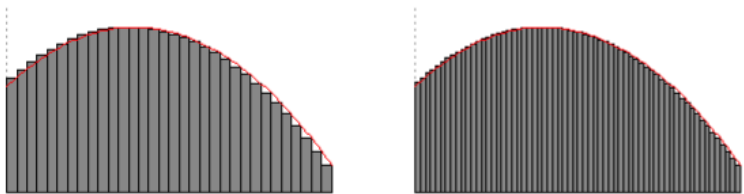


KUPM 2016



$n = 4$

$n = 16$



$n = 32$

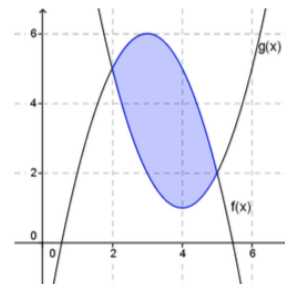
$n = 64$

Recimo, da so vsi intervali enako široki (kot v zgornjem primeru).

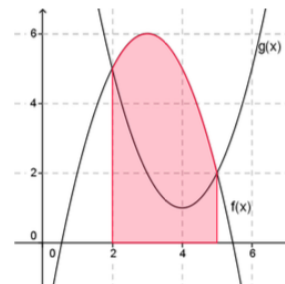
Kateri pogoj mora biti izpolnjen, da bo vsota ploščin pravokotnikov enaka ploščini lika pod krivuljo?

Vir: Openprof.com

Izračunati želimo ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij  $f(x)$  in  $g(x)$  na intervalu  $[a, b]$ .



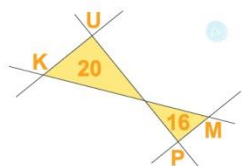
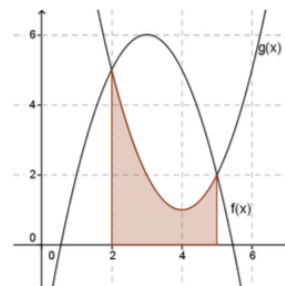
Poglejmo najprej ploščino lika, ki ga omejujeta krivulja  $f(x)$  in abscisna os.



Na intervalu  $[a, b]$  je ploščina lika med grafom funkcije  $f(x)$  in abscisno osjo, glede na geometrijski pomen določenega integrala enaka

$$S_{f(x)} = \int_a^b f(x) dx .$$

Podobno določimo ploščino lika med grafom funkcije  $f(x)$  in abscisno osjo.



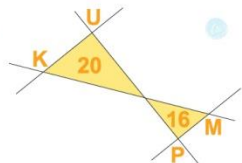
KUPM 2016

Posebno pozornost sem v delovnem zvezku posvetil zadnjemu poglavju Prostornine rotacijskih teles.

Dijakom sem želel pokazati, da lahko volumne znanih vrtenin (valj, stožec, krogla) izračunamo tudi z uporabo določenega integrala.

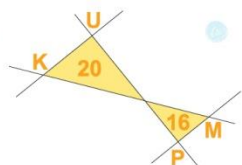
Naloge v tem poglavju sem izbiral premišljeno z namenom, da bodo dijaki znali samostojno izračunati volumen pomaranče (krogle) in limone (elipsoida, ki nastane z vrtenjem elipse okrog osi  $x$ ).

5. Izračunajte volumen sode, ki je visok 70 cm, na vrhu in dnu širok 38 cm, v sredini pa širok 46 cm. Predpostavimo, da ima lok na sodu obliko parabole.



KUPM 2016

Evalvacijska vprašanja za dijake (lestvica od 1 do 5)	povprečje
Ključna vprašanja na začetku so pri meni vzbudila zanimanje in me dovolj motivirala za nadaljnje delo.	4,0
Primerjanje odgovorov na ključna vprašanja pred in po obravnavi učne snovi se mi je zdelo zanimivo.	4,1
S pomočjo ključnih vprašanj na koncu sem se zavedel/-a novega znanja oz. novih spoznanj.	4,4
Zaradi takšnega načina dela bolje razumem učno snov in zato bo moje znanje bolj dolgoročno.	4,3
Pripravljeno gradivo mi je omogočilo vpogled v celoto in mi je bilo v pomoč pri delu.	4,6



**KUPM 2016**



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

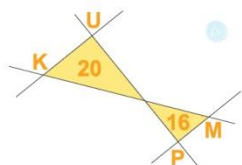
# ZAKLJUČEK

Celoten proces načrtovanja učnega sklopa je (še posebej pri prvi izkušnji z UBD) **za učitelja precej zahteven**, saj je način razmišljanja bistveno drugačen kot običajno, in dolgotrajen, ker mora poskrbeti, da pravilno poveže vse faze načrtovanja.

Popraviti moram delovni zvezek – potrebna je bila izkušnja v razredu.

Kako izvesti avtentično nalogo prej (januarja namesto konec aprila)?

Kljub vsemu na koncu **pozitiven odziv dijakov** in **dobre ocene** avtentične naloge pustijo občutek, da se je ves trud obrestoval.



KUPM 2016



Zavod Republike Slovenije za šolstvo

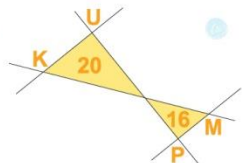


REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI SKLAD  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Hvala za pozornost.



**KUPM 2016**



Zavod Republike Slovenije za šolstvo



REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE,  
ZNANOST IN ŠPORT



EVROPSKA UNIJA  
EVROPSKI SKLAD  
SOCIALNI SKLAD  
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST