

GEOMETRIJA ZA DANES IN JUTRI

Geometry for Today and Tomorrow

Dr. Marjan Jerman

jerman@fmf.uni-lj.si

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

Razširjeni povzetek

Že samo ime pove, da so si stare civilizacije pod geometrijo predstavljale merjenje zemlje. Med preučevanjem tudi več kot 5000 let starih zapisov velikokrat ne moremo skriti navdušenja, ko ugotovimo, kako so stare civilizacije skoraj popolnoma brez matematičnih sredstev zaradi praktičnih potreb z dobrim uvidom in z izjemno bistrostjo prišle do precej globokih geometrijskih rezultatov. Na egipčanskih papirusih najdemo formulo za približno ploščino kroga in natančno prostornino priskeane piramide. Na babilonskih tablicah se presenetljivo pojavi kubična enačba pri iskanju stranic kleti z dano prostornino. Indijci so več kot 2000 let pred Evropejci prišli do neverjetnih ugotovitev zaradi religioznih potreb pri načrtovanju oltarjev. Grki so prvi geometrijo postavili na aksiomatske temelje in vpeljali visoke standarde dokazovanja, ki veljajo še danes.

Geometrija je ena od najlepših in najbolj intuitivnih vej matematike. Grki in Arabci so si celo računске zakone in enačbe, ki danes nedvomno spadajo pod algebro, predstavljali kot ploščine zlepljenih likov. Skoraj pri nobeni drugi veji matematike ne moremo samo s pomočjo opazovanja dobro narisane slike priti tako neposredno do idej, ki nam pomagajo pri dokazovanju geometrijskih trditvev.

Zakaj je torej tako težko poučevati geometrijo in zakaj so rezultati poučevanja tako presenetljivo slabi?

Nekje do osemdesetih let 20. stoletja je geometrija spadala pod klasično izobrazbo. Ponekod po svetu so na najbolj strogih gimnazijah namesto učbenika za geometrijo uporabljali kar grški izvirnik Evklidovih Elementov ali pa njegov latinski prevod. Prvi vtis je sicer navdušujoč: s pomočjo geometrije se dijaki najbolj naravno mimogrede naučijo tudi logike in standardov strogega matematičnega dokazovanja, po natančnem študiju ravnine sledi trirazsežni prostor in tudi trigonometrija se predela kot sestavni in neločljivi del geometrije.

Žal je takšen način študija za sabo pustil precejšnje opustošenje in večina dijakov ni od pouka odnesla skoraj ničesar. Glavni razlog za neuspeh kaže na primer bojevitá razprava, ko so v 19. stoletju v Angliji šolniki odločali, ali morajo dijaki za pozitivno oceno znati navesti dokaz natanko tako, kot ga je zapisal Evklid. Kasneje so znanstveniki teoretično in eksperimentalno dokazali, da otroški um in učenje nasploh v veliki večini primerov sledita določenim fazam, ki se začnejo pri enostavnem prepoznavanju oblik in končajo pri konstrukciji lastnega dokaza. Še več, ugotovili so, da velik del populacije tudi po dolgoletnem učenju geometrije ne doseže višjih faz in niti ne loči med utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Konec petdesetih let se je kot rezultat velikih potreb po naravoslovnih in inženirskih kadrih in kot odgovor na rusko prevlado v vesolju iz Amerike na hitro razširila nova matematika. Zelo priljubljena je postala tudi v Evropi, predvsem v Franciji, pa tudi k nam je prišla prek Križaničevih učbenikov. Na prvi pogled je na veliko elegantnejši in

hitrejši način nadomestila evklidsko geometrijo, ki je hkrati s takratnimi matematičnimi odkritji postala le ena od možnih geometrij. V praksi pa je iz programov skoraj izginila prostorska geometrija, trigonometrija je postala del sklopa elementarnih funkcij, več deset generacij dijakov pa nikoli ni razvilo geometrijske intuicije. Že po desetletju uveljavitve so uporabniki matematike, predvsem profesorji fizike in inženirskih predmetov, ugotovili, da velika večina študentov ogromne količine sicer strogo in natančno predelane matematike ne zna uporabiti niti pri najbolj enostavnih praktičnih nalogah.

Že zgodovina kaže različne poglede na geometrijo: od stroge uporabne vrednosti z zadovoljivimi približki do estetskih izpopolnjenih modelov s strogimi matematičnimi standardi.

Kako torej krmariti med intuicijo, uporabno vrednostjo in matematično strogostjo? Ali je smiselno različno sposobne dijake po različnih poteh peljati v geometrijo? Ali bistven napredek pri poučevanju predstavljajo računalniški programi za dinamično geometrijo, ki lahko ob pravilni uporabi izjemno izboljšajo predstavo in porodijo ideje za dokaze?

Sam zagovarjam pot, ki mi jo je pokazala kolegica Olga Arnuš, ki ima izjemen pogled v geometrijo in njeno poučevanje. Začetni aksiomatski del je treba podati zelo liberalno. Šibkejši dijaki ga lahko razumejo kot prijeten in zanimiv del starogrške zgodovine, boljši pa v njem zagledajo matematični model. Strožji pristop sledi po izrekih o skladnosti.

Kasneje se mi zdi koristno, če le imamo čas in če si dijaki to želijo, prikazati različne pristope. Veliko klasičnih izrekov lahko dokažemo na več bistveno različnih načinov. Uporabimo lahko klasično evklidsko geometrijo, koordinatni sistem, vektorje, trigonometrijo, kompleksna števila in prav vsak od načinov da nov uvid v matematiko ter nam in dijakom razširi matematična obzorja.

Ključne besede: geometrija, evklidska geometrija, poučevanje geometrije, nova matematika, zgodovina matematike

Abstract

Geometry is one of the few mathematical disciplines that enable a smooth transition from intuitive ideas to strict logical proof. So, why is it so difficult to teach geometry and why are the results of our teaching often disappointing?

Until the end of the 1970s, geometry had usually been taught using Euclid's Elements. The results of most students were unusually poor, which was later explained by several theories which showed that the human mind follows a certain pattern in the acquisition of knowledge: from the recognition of simple shapes to the construction of one's own proof. Later on, the teaching practices of "New Mathematics" tried to find shortcuts to geometry by using modern approaches to Mathematics based on set theory and abstract vector spaces. The results were even worse and most students almost completely lost their geometric intuition.

My approach to teaching geometry follows the advice of an experienced teacher, Olga Arnuš. The first few groups of axioms should be taught very liberally. The low-achieving students will see them as an interesting part of Greek history, while the high-achieving ones will be able to recognise a mathematical model. Following the introduction of axioms of congruence, a stricter approach should be adopted. Also,

whenever possible, the classical theorems should be proved by different means, ranging from a purely geometric approach to the use of a coordinate system.

Keywords: geometry, Euclidean geometry, teaching geometry, New Mathematics, history of Mathematics

Viri

1. Anglin, W. S. (1994): *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, Springer.
2. Kline, M. (1974): *Why Johnny can't add: The Failure of the New Math*, Random House
3. Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1999): *The child's conception of geometry*, Routledge.