Geometrija za danes in jutri

Marjan Jerman

16. november 2016

3. mednarodna konferenca
o učenju in poučevanju matematike
KUPM 2016

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

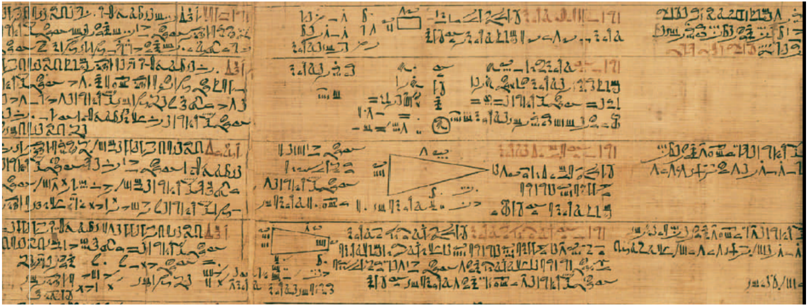
REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT

EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Naložbo sofinancira Evropski socialni sklad ter Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport, projekt Krepitev kompetenc strokovnih delavcev na področju vodenja inovativnega vzgojno-izobraževalnega zavoda v obdobju od 2016 do 2018

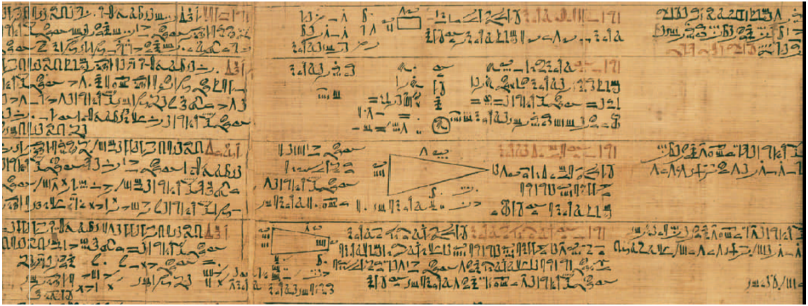
Rhindov papirus

- Geometrija = merjenje Zemlje
- Rhind, Ahmes



Rhindov papirus

- Geometrija = merjenje Zemlje
- Rhind, Ahmes



Naloga 50

- Kolikšna je ploščina kroga s premerom 9?
- Od premera odštej devetino in kvadriraj.
- $p = (9 - 1)^2 = 64$
- $p = (2r - \frac{1}{9}2r)^2$
- $p = (\frac{16}{9})^2 r^2$
- $(\frac{16}{9})^2 \approx 3,16 \approx \pi$

Naloga 50

- Kolikšna je ploščina kroga s premerom 9?
- Od premera odštej devetino in kvadriraj.
- $p = (9 - 1)^2 = 64$
- $p = (2r - \frac{1}{9}2r)^2$
- $p = (\frac{16}{9})^2 r^2$
- $(\frac{16}{9})^2 \approx 3,16 \approx \pi$

Naloga 50

- Kolikšna je ploščina kroga s premerom 9?
- Od premera odštej devetino in kvadriraj.
- $p = (9 - 1)^2 = 64$
- $p = (2r - \frac{1}{9}2r)^2$
- $p = (\frac{16}{9})^2 r^2$
- $(\frac{16}{9})^2 \approx 3,16 \approx \pi$

Naloga 50

- Kolikšna je ploščina kroga s premerom 9?
- Od premera odštej devetino in kvadriraj.
- $p = (9 - 1)^2 = 64$
- $p = (2r - \frac{1}{9}2r)^2$
- $p = (\frac{16}{9})^2 r^2$
- $(\frac{16}{9})^2 \approx 3,16 \approx \pi$

Naloga 50

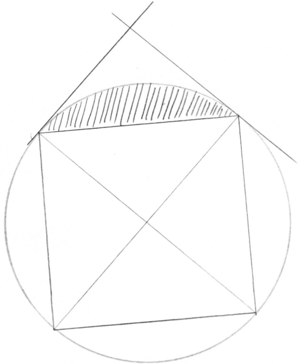
- Kolikšna je ploščina kroga s premerom 9?
- Od premera odštej devetino in kvadriraj.
- $p = (9 - 1)^2 = 64$
- $p = (2r - \frac{1}{9}2r)^2$
- $p = (\frac{16}{9})^2 r^2$
- $(\frac{16}{9})^2 \approx 3,16 \approx \pi$

Naloga 50

- Kolikšna je ploščina kroga s premerom 9?
- Od premera odštej devetino in kvadriraj.
- $p = (9 - 1)^2 = 64$
- $p = (2r - \frac{1}{9}2r)^2$
- $p = (\frac{16}{9})^2 r^2$
- $(\frac{16}{9})^2 \approx 3,16 \approx \pi$

Antifon-kvadrat

Antifonov rezultat: *V krog včrtani pravilni 2^n-kotnik zavzame več kot $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})$-kratnik ploščine kroga.*

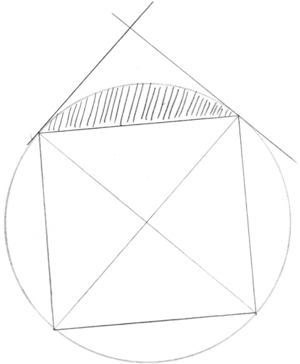


$P - S_{2^2} < S_{2^2}$

$S_{2^2} > \frac{1}{2^1} P$

Antifon-kvadrat

Antifonov rezultat: *V krog včrtani pravilni 2^n-kotnik zavzame več kot $\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$-kratnik ploščine kroga.*

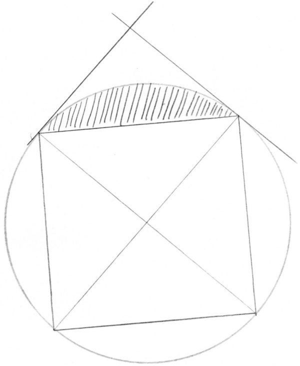


$$P - S_{2^2} < S_{2^2}$$

$$S_{2^2} > \frac{1}{2^1} P$$

Antifon-kvadrat

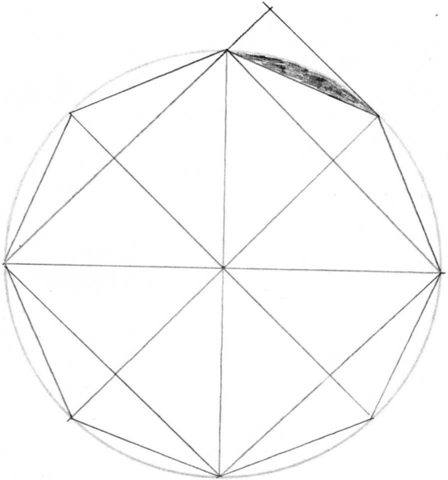
Antifonov rezultat: *V krog včrtani pravilni 2^n-kotnik zavzame več kot $(1 - \frac{1}{2^{n-1}})$-kratnik ploščine kroga.*



$P - S_{2^2} < S_{2^2}$

$S_{2^2} > \frac{1}{2^1} P$

Antifon-osemkotnik



$$P - S_{2^3} < \frac{1}{2}\left(P - S_{2^2}\right)$$

$$< \frac{1}{2}P - \frac{1}{2^2}P$$

$$= \frac{1}{2^2}P$$

Evklidovi Elementi

- Evdoksov dokaz s protislovjem: *Ploščina kroga je sorazmerna s kvadratom njegovega premera*.
- P_1 ploščina kroga s premerom 1, P_d ploščina kroga s premerom d. (Danes $P_1 = \frac{1}{4}\pi$.)
- Pa naj bo recimo $P_1 d^2 < P_d$. Tedaj $P_d - P_1 d^2 > 0$.
- $\frac{1}{2^{n-1}} P_d < P_d - P_1 d^2$
- $(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) P_d > P_1 d^2$
- S_d ploščina pravilnega 2^n-kotnika, včrtanega v krog s premerom d.

Evklidovi Elementi

- Evdoksov dokaz s protislovjem: *Ploščina kroga je sorazmerna s kvadratom njegovega premera*.
- P_1 ploščina kroga s premerom 1, P_d ploščina kroga s premerom d. (Danes $P_1 = \frac{1}{4}\pi$.)
- Pa naj bo recimo $P_1 d^2 < P_d$. Tedaj $P_d - P_1 d^2 > 0$.
- $\frac{1}{2^{n-1}} P_d < P_d - P_1 d^2$
- $(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) P_d > P_1 d^2$
- S_d ploščina pravilnega 2^n-kotnika, včrtanega v krog s premerom d.

Evklidovi Elementi

- Evdoksov dokaz s protislovjem: *Ploščina kroga je sorazmerna s kvadratom njegovega premera*.
- P_1 ploščina kroga s premerom 1, P_d ploščina kroga s premerom d. (Danes $P_1 = \frac{1}{4}\pi$.)
- Pa naj bo recimo $P_1 d^2 < P_d$. Tedaj $P_d - P_1 d^2 > 0$.
- $\frac{1}{2^{n-1}} P_d < P_d - P_1 d^2$
- $(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) P_d > P_1 d^2$
- S_d ploščina pravilnega 2^n-kotnika, včrtanega v krog s premerom d.

Evklidovi Elementi

- Evdoksov dokaz s protislovjem: *Ploščina kroga je sorazmerna s kvadratom njegovega premera*.
- P_1 ploščina kroga s premerom 1, P_d ploščina kroga s premerom d. (Danes $P_1 = \frac{1}{4}\pi$.)
- Pa naj bo recimo $P_1 d^2 < P_d$. Tedaj $P_d - P_1 d^2 > 0$.
- $\frac{1}{2^{n-1}} P_d < P_d - P_1 d^2$
- $(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) P_d > P_1 d^2$
- S_d ploščina pravilnega 2^n-kotnika, včrtanega v krog s premerom d.

Evklidovi Elementi

- Evdoksov dokaz s protislovjem: *Ploščina kroga je sorazmerna s kvadratom njegovega premera*.
- P_1 ploščina kroga s premerom 1, P_d ploščina kroga s premerom d. (Danes $P_1 = \frac{1}{4}\pi$.)
- Pa naj bo recimo $P_1 d^2 < P_d$. Tedaj $P_d - P_1 d^2 > 0$.
- $\frac{1}{2^{n-1}} P_d < P_d - P_1 d^2$
- $(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) P_d > P_1 d^2$
- S_d ploščina pravilnega 2^n-kotnika, včrtanega v krog s premerom d.

Evklidovi Elementi

- Evdoksov dokaz s protislovjem: *Ploščina kroga je sorazmerna s kvadratom njegovega premera*.
- P_1 ploščina kroga s premerom 1, P_d ploščina kroga s premerom d. (Danes $P_1 = \frac{1}{4}\pi$.)
- Pa naj bo recimo $P_1 d^2 < P_d$. Tedaj $P_d - P_1 d^2 > 0$.
- $\frac{1}{2^{n-1}} P_d < P_d - P_1 d^2$
- $(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) P_d > P_1 d^2$
- S_d ploščina pravilnega 2^n-kotnika, včrtanega v krog s premerom d.

Evklidovi Elementi

- Evdoksov dokaz s protislovjem: *Ploščina kroga je sorazmerna s kvadratom njegovega premera*.
- P_1 ploščina kroga s premerom 1, P_d ploščina kroga s premerom d. (Danes $P_1 = \frac{1}{4}\pi$.)
- Pa naj bo recimo $P_1 d^2 < P_d$. Tedaj $P_d - P_1 d^2 > 0$.
- $\frac{1}{2^{n-1}} P_d < P_d - P_1 d^2$
- $(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) P_d > P_1 d^2$
- S_d ploščina pravilnega 2^n-kotnika, včrtanega v krog s premerom d.

Evklidovi Elementi

- Evdoksov dokaz s protislovjem: *Ploščina kroga je sorazmerna s kvadratom njegovega premera*.
- P_1 ploščina kroga s premerom 1, P_d ploščina kroga s premerom d. (Danes $P_1 = \frac{1}{4}\pi$.)
- Pa naj bo recimo $P_1 d^2 < P_d$. Tedaj $P_d - P_1 d^2 > 0$.
- $\frac{1}{2^{n-1}} P_d < P_d - P_1 d^2$
- $(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) P_d > P_1 d^2$
- S_d ploščina pravilnega 2^n-kotnika, včrtanega v krog s premerom d.

Evklidovi Elementi

- Evdoksov dokaz s protislovjem: *Ploščina kroga je sorazmerna s kvadratom njegovega premera*.
- P_1 ploščina kroga s premerom 1, P_d ploščina kroga s premerom d. (Danes $P_1 = \frac{1}{4}\pi$.)
- Pa naj bo recimo $P_1 d^2 < P_d$. Tedaj $P_d - P_1 d^2 > 0$.
- $\frac{1}{2^{n-1}} P_d < P_d - P_1 d^2$
- $(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) P_d > P_1 d^2$
- S_d ploščina pravilnega 2^n-kotnika, včrtanega v krog s premerom d.

Nadaljevanje Evdoksovega dokaza

- Glede na Antifonov rezultat velja: $S_d > (1 - \frac{1}{2^{n-1}})P_d > P_1 d^2$.
- Za pravilne like ploščina narašča s kvadratom stranice, zato je $S_d = S_1 d^2$.
- Ker je jasno $P_1 > S_1$, od tod dobimo protislovje:

$$P_1 d^2 > S_1 d^2 = S_d > P_1 d^2$$

- Enako ponovimo za primer $P_1 d^2 > P_d$.
- Zato je res ploščina kroga sorazmerna s kvadratom premera.

Nadaljevanje Evdoksovega dokaza

- Glede na Antifonov rezultat velja: $S_d > (1 - \frac{1}{2^{n-1}})P_d > P_1 d^2$.
- Za pravilne like ploščina narašča s kvadratom stranice, zato je $S_d = S_1 d^2$.
- Ker je jasno $P_1 > S_1$, od tod dobimo protislovje:

$$P_1 d^2 > S_1 d^2 = S_d > P_1 d^2$$

- Enako ponovimo za primer $P_1 d^2 > P_d$.
- Zato je res ploščina kroga sorazmerna s kvadratom premera.

Nadaljevanje Evdoksovega dokaza

- Glede na Antifonov rezultat velja: $S_d > (1 - \frac{1}{2^{n-1}})P_d > P_1 d^2$.
- Za pravilne like ploščina narašča s kvadratom stranice, zato je $S_d = S_1 d^2$.
- Ker je jasno $P_1 > S_1$, od tod dobimo protislovje:

$$P_1 d^2 > S_1 d^2 = S_d > P_1 d^2$$

- Enako ponovimo za primer $P_1 d^2 > P_d$.
- Zato je res ploščina kroga sorazmerna s kvadratom premera.

Nadaljevanje Evdoksovega dokaza

- Glede na Antifonov rezultat velja: $S_d > (1 - \frac{1}{2^{n-1}})P_d > P_1 d^2$.
- Za pravilne like ploščina narašča s kvadratom stranice, zato je $S_d = S_1 d^2$.
- Ker je jasno $P_1 > S_1$, od tod dobimo protislovje:

$$P_1 d^2 > S_1 d^2 = S_d > P_1 d^2$$

- Enako ponovimo za primer $P_1 d^2 > P_d$.
- Zato je res ploščina kroga sorazmerna s kvadratom premera.

Nadaljevanje Evdoksovega dokaza

- Glede na Antifonov rezultat velja: $S_d > (1 - \frac{1}{2^{n-1}})P_d > P_1 d^2$.
- Za pravilne like ploščina narašča s kvadratom stranice, zato je $S_d = S_1 d^2$.
- Ker je jasno $P_1 > S_1$, od tod dobimo protislovje:

$$P_1 d^2 > S_1 d^2 = S_d > P_1 d^2$$

- Enako ponovimo za primer $P_1 d^2 > P_d$.
- Zato je res ploščina kroga sorazmerna s kvadratom premera.

Vprašanja

- Kakšna je bistvena razlika med egipčanskim in grškim rezultatom?
- Kako bi dijakom izpeljali ploščino kroga?
- Kakšna je vrednost egipčanskega rezultata? Ali enostavnost in numerična pravilnost odtehtata nepopolnost?
- Koliko dijakov bo razumelo Evdoksovo izpeljavo?
- Ali je prava rešitev, da od dijakov zahtevamo le poznavanje Evdoksovega rezultata v današnji obliki $P_{2r} = \pi r^2$ in upamo, da bodo vsaj nekateri razumeli dokaz?
- Ali bo večina dijakov med izpeljavo zatavala drugam in od ure odnesla manj, kot če bi naredili le par primerov uporabe?

Vprašanja

- Kakšna je bistvena razlika med egipčanskim in grškim rezultatom?
- Kako bi dijakom izpeljali ploščino kroga?
- Kakšna je vrednost egipčanskega rezultata? Ali enostavnost in numerična pravilnost odtehtata nepopolnost?
- Koliko dijakov bo razumelo Evdoksovo izpeljavo?
- Ali je prava rešitev, da od dijakov zahtevamo le poznavanje Evdoksovega rezultata v današnji obliki $P_{2r} = \pi r^2$ in upamo, da bodo vsaj nekateri razumeli dokaz?
- Ali bo večina dijakov med izpeljavo zatavala drugam in od ure odnesla manj, kot če bi naredili le par primerov uporabe?

Vprašanja

- Kakšna je bistvena razlika med egipčanskim in grškim rezultatom?
- Kako bi dijakom izpeljali ploščino kroga?
- Kakšna je vrednost egipčanskega rezultata? Ali enostavnost in numerična pravilnost odtehtata nepopolnost?
- Koliko dijakov bo razumelo Evdoksovo izpeljavo?
- Ali je prava rešitev, da od dijakov zahtevamo le poznavanje Evdoksovega rezultata v današnji obliki $P_{2r} = \pi r^2$ in upamo, da bodo vsaj nekateri razumeli dokaz?
- Ali bo večina dijakov med izpeljavo zatavala drugam in od ure odnesla manj, kot če bi naredili le par primerov uporabe?

Vprašanja

- Kakšna je bistvena razlika med egipčanskim in grškim rezultatom?
- Kako bi dijakom izpeljali ploščino kroga?
- Kakšna je vrednost egipčanskega rezultata? Ali enostavnost in numerična pravilnost odtehtata nepopolnost?
- Koliko dijakov bo razumelo Evdoksovo izpeljavo?
- Ali je prava rešitev, da od dijakov zahtevamo le poznavanje Evdoksovega rezultata v današnji obliki $P_{2r} = \pi r^2$ in upamo, da bodo vsaj nekateri razumeli dokaz?
- Ali bo večina dijakov med izpeljavo zatavala drugam in od ure odnesla manj, kot če bi naredili le par primerov uporabe?

Vprašanja

- Kakšna je bistvena razlika med egipčanskim in grškim rezultatom?
- Kako bi dijakom izpeljali ploščino kroga?
- Kakšna je vrednost egipčanskega rezultata? Ali enostavnost in numerična pravilnost odtehtata nepopolnost?
- Koliko dijakov bo razumelo Evdoksovo izpeljavo?
- Ali je prava rešitev, da od dijakov zahtevamo le poznavanje Evdoksovega rezultata v današnji obliki $P_{2r} = \pi r^2$ in upamo, da bodo vsaj nekateri razumeli dokaz?
- Ali bo večina dijakov med izpeljavo zatavala drugam in od ure odnesla manj, kot če bi naredili le par primerov uporabe?

Vprašanja

- Kakšna je bistvena razlika med egipčanskim in grškim rezultatom?
- Kako bi dijakom izpeljali ploščino kroga?
- Kakšna je vrednost egipčanskega rezultata? Ali enostavnost in numerična pravilnost odtehtata nepopolnost?
- Koliko dijakov bo razumelo Evdoksovo izpeljavo?
- Ali je prava rešitev, da od dijakov zahtevamo le poznavanje Evdoksovega rezultata v današnji obliki $P_{2r} = \pi r^2$ in upamo, da bodo vsaj nekateri razumeli dokaz?
- Ali bo večina dijakov med izpeljavo zatavala drugam in od ure odnesla manj, kot če bi naredili le par primerov uporabe?

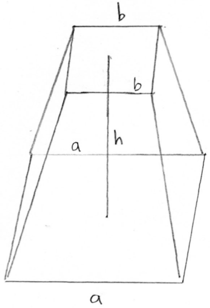
Vprašanja

- Kakšna je bistvena razlika med egipčanskim in grškim rezultatom?
- Kako bi dijakom izpeljali ploščino kroga?
- Kakšna je vrednost egipčanskega rezultata? Ali enostavnost in numerična pravilnost odtehtata nepopolnost?
- Koliko dijakov bo razumelo Evdoksovo izpeljavo?
- Ali je prava rešitev, da od dijakov zahtevamo le poznavanje Evdoksovega rezultata v današnji obliki $P_{2r} = \pi r^2$ in upamo, da bodo vsaj nekateri razumeli dokaz?
- Ali bo večina dijakov med izpeljavo zatavala drugam in od ure odnesla manj, kot če bi naredili le par primerov uporabe?

Moskovski papirus

$$V = \frac{1}{3}(h(a^2 + ab + b^2))$$

$$a = 4,\ b = 2,\ h = 6$$

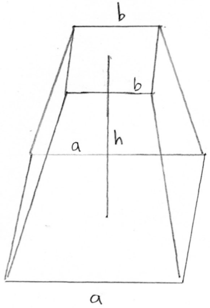


Kako so prišli do natančnega rezultata? S poskušanjem?

Moskovski papirus

$$V = \frac{1}{3}(h(a^2 + ab + b^2))$$

$$a = 4,\ b = 2,\ h = 6$$

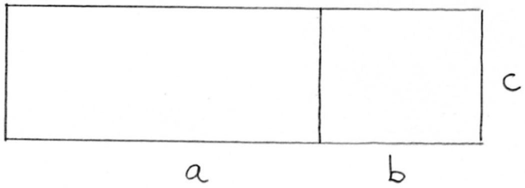


Kako so prišli do natančnega rezultata? S poskušanjem?

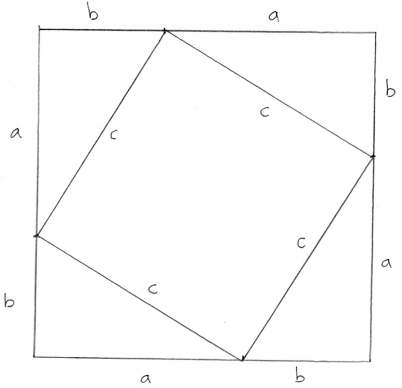
Intuitivnost geometrije

Zakoni, ki danes spadajo pod algebro, so bili za Grke in Arabce sestavni del geometrije:

$$(a+b)c = ac + bc$$



Predstava daje idejo za dokaz



$$S = (a+b)^2 = c^2 + 4\,\frac{ab}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Poučevanje geometrije

- Geometrija je ena najlepših in najbolj intuitivnih vej matematike, ki se da dobro predstavljati in ima široko uporabo.
- Zakaj je torej tako težko poučevati geometrijo?
- Zakaj so rezultati poučevanje pogosto zelo slabi?

Poučevanje geometrije

- Geometrija je ena najlepših in najbolj intuitivnih vej matematike, ki se da dobro predstavljati in ima široko uporabo.
- Zakaj je torej tako težko poučevati geometrijo?
- Zakaj so rezultati poučevanje pogosto zelo slabi?

Poučevanje geometrije

- Geometrija je ena najlepših in najbolj intuitivnih vej matematike, ki se da dobro predstavljati in ima široko uporabo.
- Zakaj je torej tako težko poučevati geometrijo?
- Zakaj so rezultati poučevanje pogosto zelo slabi?

Poučevanje geometrije

- Geometrija je ena najlepših in najbolj intuitivnih vej matematike, ki se da dobro predstavljati in ima široko uporabo.
- Zakaj je torej tako težko poučevati geometrijo?
- Zakaj so rezultati poučevanje pogosto zelo slabi?

Poučevanje geometrije z Elementi

- Evklidovi Elementi: s pomočjo geometrije se dijaki mimogrede na naraven način naučijo tudi logike in standardov matematičnega dokazovanja, kasneje sledi trirazsežni prostor, trigonometrija je sestavni del geometrije.
- Rezultat: **katastrofa**. Zakaj? Npr. V 19. stoletju je bila v Angliji burna razprava med šolniki, ali morajo dijaki za pozitivno oceno navesti dokaz točno tako, kot je napisan v Elementih.
- Otroški um v večini primerov sledi določenim fazam, ki se začnejo pri prepoznavanju oblik, nato pa sledijo faze enostavne abstrakcije, ki počasi vodijo do oblikovanja lastnega dokaza.
- Velik del populacije niti ne doseže višjih faz. Ne začutijo potrebe po dokazovanju. Ne ločijo med razlago, utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Poučevanje geometrije z Elementi

- Evklidovi Elementi: s pomočjo geometrije se dijaki mimogrede na naraven način naučijo tudi logike in standardov matematičnega dokazovanja, kasneje sledi trirazsežni prostor, trigonometrija je sestavni del geometrije.
- Rezultat: **katastrofa**. Zakaj? Npr. V 19. stoletju je bila v Angliji burna razprava med šolniki, ali morajo dijaki za pozitivno oceno navesti dokaz točno tako, kot je napisan v Elementih.
- Otroški um v večini primerov sledi določenim fazam, ki se začnejo pri prepoznavanju oblik, nato pa sledijo faze enostavne abstrakcije, ki počasi vodijo do oblikovanja lastnega dokaza.
- Velik del populacije niti ne doseže višjih faz. Ne začutijo potrebe po dokazovanju. Ne ločijo med razlago, utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Poučevanje geometrije z Elementi

- Evklidovi Elementi: s pomočjo geometrije se dijaki mimogrede na naraven način naučijo tudi logike in standardov matematičnega dokazovanja, kasneje sledi trirazsežni prostor, trigonometrija je sestavni del geometrije.
- Rezultat: **katastrofa**. Zakaj? Npr. V 19. stoletju je bila v Angliji burna razprava med šolniki, ali morajo dijaki za pozitivno oceno navesti dokaz točno tako, kot je napisan v Elementih.
- Otroški um v večini primerov sledi določenim fazam, ki se začnejo pri prepoznavanju oblik, nato pa sledijo faze enostavne abstrakcije, ki počasi vodijo do oblikovanja lastnega dokaza.
- Velik del populacije niti ne doseže višjih faz. Ne začutijo potrebe po dokazovanju. Ne ločijo med razlago, utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Poučevanje geometrije z Elementi

- Evklidovi Elementi: s pomočjo geometrije se dijaki mimogrede na naraven način naučijo tudi logike in standardov matematičnega dokazovanja, kasneje sledi trirazsežni prostor, trigonometrija je sestavni del geometrije.
- Rezultat: **katastrofa**. Zakaj? Npr. V 19. stoletju je bila v Angliji burna razprava med šolniki, ali morajo dijaki za pozitivno oceno navesti dokaz točno tako, kot je napisan v Elementih.
- Otroški um v večini primerov sledi določenim fazam, ki se začnejo pri prepoznavanju oblik, nato pa sledijo faze enostavne abstrakcije, ki počasi vodijo do oblikovanja lastnega dokaza.
- Velik del populacije niti ne doseže višjih faz. Ne začutijo potrebe po dokazovanju. Ne ločijo med razlago, utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Poučevanje geometrije z Elementi

- Evklidovi Elementi: s pomočjo geometrije se dijaki mimogrede na naraven način naučijo tudi logike in standardov matematičnega dokazovanja, kasneje sledi trirazsežni prostor, trigonometrija je sestavni del geometrije.
- Rezultat: **katastrofa**. Zakaj? Npr. V 19. stoletju je bila v Angliji burna razprava med šolniki, ali morajo dijaki za pozitivno oceno navesti dokaz točno tako, kot je napisan v Elementih.
- Otroški um v večini primerov sledi določenim fazam, ki se začnejo pri prepoznavanju oblik, nato pa sledijo faze enostavne abstrakcije, ki počasi vodijo do oblikovanja lastnega dokaza.
- Velik del populacije niti ne doseže višjih faz. Ne začutijo potrebe po dokazovanju. Ne ločijo med razlago, utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Poučevanje geometrije z Elementi

- Evklidovi Elementi: s pomočjo geometrije se dijaki mimogrede na naraven način naučijo tudi logike in standardov matematičnega dokazovanja, kasneje sledi trirazsežni prostor, trigonometrija je sestavni del geometrije.
- Rezultat: **katastrofa**. Zakaj? Npr. V 19. stoletju je bila v Angliji burna razprava med šolniki, ali morajo dijaki za pozitivno oceno navesti dokaz točno tako, kot je napisan v Elementih.
- Otroški um v večini primerov sledi določenim fazam, ki se začnejo pri prepoznavanju oblik, nato pa sledijo faze enostavne abstrakcije, ki počasi vodijo do oblikovanja lastnega dokaza.
- Velik del populacije niti ne doseže višjih faz. Ne začutijo potrebe po dokazovanju. Ne ločijo med razlago, utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Poučevanje geometrije z Elementi

- Evklidovi Elementi: s pomočjo geometrije se dijaki mimogrede na naraven način naučijo tudi logike in standardov matematičnega dokazovanja, kasneje sledi trirazsežni prostor, trigonometrija je sestavni del geometrije.
- Rezultat: **katastrofa**. Zakaj? Npr. V 19. stoletju je bila v Angliji burna razprava med šolniki, ali morajo dijaki za pozitivno oceno navesti dokaz točno tako, kot je napisan v Elementih.
- Otroški um v večini primerov sledi določenim fazam, ki se začnejo pri prepoznavanju oblik, nato pa sledijo faze enostavne abstrakcije, ki počasi vodijo do oblikovanja lastnega dokaza.
- Velik del populacije niti ne doseže višjih faz. Ne začutijo potrebe po dokazovanju. Ne ločijo med razlago, utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Poučevanje geometrije z Elementi

- Evklidovi Elementi: s pomočjo geometrije se dijaki mimogrede na naraven način naučijo tudi logike in standardov matematičnega dokazovanja, kasneje sledi trirazsežni prostor, trigonometrija je sestavni del geometrije.
- Rezultat: **katastrofa**. Zakaj? Npr. V 19. stoletju je bila v Angliji burna razprava med šolniki, ali morajo dijaki za pozitivno oceno navesti dokaz točno tako, kot je napisan v Elementih.
- Otroški um v večini primerov sledi določenim fazam, ki se začnejo pri prepoznavanju oblik, nato pa sledijo faze enostavne abstrakcije, ki počasi vodijo do oblikovanja lastnega dokaza.
- Velik del populacije niti ne doseže višjih faz. Ne začutijo potrebe po dokazovanju. Ne ločijo med razlago, utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Poučevanje geometrije z Elementi

- Evklidovi Elementi: s pomočjo geometrije se dijaki mimogrede na naraven način naučijo tudi logike in standardov matematičnega dokazovanja, kasneje sledi trirazsežni prostor, trigonometrija je sestavni del geometrije.
- Rezultat: **katastrofa**. Zakaj? Npr. V 19. stoletju je bila v Angliji burna razprava med šolniki, ali morajo dijaki za pozitivno oceno navesti dokaz točno tako, kot je napisan v Elementih.
- Otroški um v večini primerov sledi določenim fazam, ki se začnejo pri prepoznavanju oblik, nato pa sledijo faze enostavne abstrakcije, ki počasi vodijo do oblikovanja lastnega dokaza.
- Velik del populacije niti ne doseže višjih faz. Ne začutijo potrebe po dokazovanju. Ne ločijo med razlago, utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Poučevanje geometrije z Elementi

- Evklidovi Elementi: s pomočjo geometrije se dijaki mimogrede na naraven način naučijo tudi logike in standardov matematičnega dokazovanja, kasneje sledi trirazsežni prostor, trigonometrija je sestavni del geometrije.
- Rezultat: **katastrofa**. Zakaj? Npr. V 19. stoletju je bila v Angliji burna razprava med šolniki, ali morajo dijaki za pozitivno oceno navesti dokaz točno tako, kot je napisan v Elementih.
- Otroški um v večini primerov sledi določenim fazam, ki se začnejo pri prepoznavanju oblik, nato pa sledijo faze enostavne abstrakcije, ki počasi vodijo do oblikovanja lastnega dokaza.
- Velik del populacije niti ne doseže višjih faz. Ne začutijo potrebe po dokazovanju. Ne ločijo med razlago, utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Poučevanje geometrije z Elementi

- Evklidovi Elementi: s pomočjo geometrije se dijaki mimogrede na naraven način naučijo tudi logike in standardov matematičnega dokazovanja, kasneje sledi trirazsežni prostor, trigonometrija je sestavni del geometrije.
- Rezultat: **katastrofa**. Zakaj? Npr. V 19. stoletju je bila v Angliji burna razprava med šolniki, ali morajo dijaki za pozitivno oceno navesti dokaz točno tako, kot je napisan v Elementih.
- Otroški um v večini primerov sledi določenim fazam, ki se začnejo pri prepoznavanju oblik, nato pa sledijo faze enostavne abstrakcije, ki počasi vodijo do oblikovanja lastnega dokaza.
- Velik del populacije niti ne doseže višjih faz. Ne začutijo potrebe po dokazovanju. Ne ločijo med razlago, utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Poučevanje geometrije z Elementi

- Evklidovi Elementi: s pomočjo geometrije se dijaki mimogrede na naraven način naučijo tudi logike in standardov matematičnega dokazovanja, kasneje sledi trirazsežni prostor, trigonometrija je sestavni del geometrije.
- Rezultat: **katastrofa**. Zakaj? Npr. V 19. stoletju je bila v Angliji burna razprava med šolniki, ali morajo dijaki za pozitivno oceno navesti dokaz točno tako, kot je napisan v Elementih.
- Otroški um v večini primerov sledi določenim fazam, ki se začnejo pri prepoznavanju oblik, nato pa sledijo faze enostavne abstrakcije, ki počasi vodijo do oblikovanja lastnega dokaza.
- Velik del populacije niti ne doseže višjih faz. Ne začutijo potrebe po dokazovanju. Ne ločijo med razlago, utemeljitvijo, preverbo in dokazom trditve.

Poučevanje geometrije z Novo matematiko

- Vesoljska tekma prinese Novo matematiko.
- Na elegantnejši in hitrejši način nadomesti evklidsko geometrijo, ki je le ena od možnih geometrij.
- Praksa: Prostorska geometrija skoraj izgine. Trigonometrija postane del sklopa elementarnih funkcij. Vektorji se obravnavajo kot algebrska struktura.
- Rezultat: **katastrofa**. Več deset generacij dijakov ne razvije geometrijske intuicije. Leta 1962 skupina 75 izjemnih matematikov podpiše memorandum in pozove k bistvenim spremembam. Morris Kline: *Why Johnny Can't Add*

Poučevanje geometrije z Novo matematiko

- Vesoljska tekma prinese Novo matematiko.
- Na elegantnejši in hitrejši način nadomesti evklidsko geometrijo, ki je le ena od možnih geometrij.
- Praksa: Prostorska geometrija skoraj izgine. Trigonometrija postane del sklopa elementarnih funkcij. Vektorji se obravnavajo kot algebrska struktura.
- Rezultat: **katastrofa**. Več deset generacij dijakov ne razvije geometrijske intuicije. Leta 1962 skupina 75 izjemnih matematikov podpiše memorandum in pozove k bistvenim spremembam. Morris Kline: *Why Johnny Can't Add*

Poučevanje geometrije z Novo matematiko

- Vesoljska tekma prinese Novo matematiko.
- Na elegantnejši in hitrejši način nadomesti evklidsko geometrijo, ki je le ena od možnih geometrij.
- Praksa: Prostorska geometrija skoraj izgine. Trigonometrija postane del sklopa elementarnih funkcij. Vektorji se obravnavajo kot algebrska struktura.
- Rezultat: **katastrofa**. Več deset generacij dijakov ne razvije geometrijske intuicije. Leta 1962 skupina 75 izjemnih matematikov podpiše memorandum in pozove k bistvenim spremembam. Morris Kline: *Why Johnny Can't Add*

Poučevanje geometrije z Novo matematiko

- Vesoljska tekma prinese Novo matematiko.
- Na elegantnejši in hitrejši način nadomesti evklidsko geometrijo, ki je le ena od možnih geometrij.
- Praksa: Prostorska geometrija skoraj izgine. Trigonometrija postane del sklopa elementarnih funkcij. Vektorji se obravnavajo kot algebrska struktura.
- Rezultat: **katastrofa**. Več deset generacij dijakov ne razvije geometrijske intuicije. Leta 1962 skupina 75 izjemnih matematikov podpiše memorandum in pozove k bistvenim spremembam. Morris Kline: *Why Johnny Can't Add*

Poučevanje geometrije z Novo matematiko

- Vesoljska tekma prinese Novo matematiko.
- Na elegantnejši in hitrejši način nadomesti evklidsko geometrijo, ki je le ena od možnih geometrij.
- Praksa: Prostorska geometrija skoraj izgine. Trigonometrija postane del sklopa elementarnih funkcij. Vektorji se obravnavajo kot algebrska struktura.
- Rezultat: **katastrofa**. Več deset generacij dijakov ne razvije geometrijske intuicije. Leta 1962 skupina 75 izjemnih matematikov podpiše memorandum in pozove k bistvenim spremembam. Morris Kline: *Why Johnny Can't Add*

Poučevanje geometrije z Novo matematiko

- Vesoljska tekma prinese Novo matematiko.
- Na elegantnejši in hitrejši način nadomesti evklidsko geometrijo, ki je le ena od možnih geometrij.
- Praksa: Prostorska geometrija skoraj izgine. Trigonometrija postane del sklopa elementarnih funkcij. Vektorji se obravnavajo kot algebrska struktura.
- Rezultat: **katastrofa**. Več deset generacij dijakov ne razvije geometrijske intuicije. Leta 1962 skupina 75 izjemnih matematikov podpiše memorandum in pozove k bistvenim spremembam. Morris Kline: *Why Johnny Can't Add*

Poučevanje geometrije z Novo matematiko

- Vesoljska tekma prinese Novo matematiko.
- Na elegantnejši in hitrejši način nadomesti evklidsko geometrijo, ki je le ena od možnih geometrij.
- Praksa: Prostorska geometrija skoraj izgine. Trigonometrija postane del sklopa elementarnih funkcij. Vektorji se obravnavajo kot algebrska struktura.
- Rezultat: **katastrofa**. Več deset generacij dijakov ne razvije geometrijske intuicije. Leta 1962 skupina 75 izjemnih matematikov podpiše memorandum in pozove k bistvenim spremembam. Morris Kline: *Why Johnny Can't Add*

Poučevanje geometrije z Novo matematiko

- Vesoljska tekma prinese Novo matematiko.
- Na elegantnejši in hitrejši način nadomesti evklidsko geometrijo, ki je le ena od možnih geometrij.
- Praksa: Prostorska geometrija skoraj izgine. Trigonometrija postane del sklopa elementarnih funkcij. Vektorji se obravnavajo kot algebrska struktura.
- Rezultat: **katastrofa**. Več deset generacij dijakov ne razvije geometrijske intuicije. Leta 1962 skupina 75 izjemnih matematikov podpiše memorandum in pozove k bistvenim spremembam. Morris Kline: *Why Johnny Can't Add*

Poučevanje geometrije z Novo matematiko

- Vesoljska tekma prinese Novo matematiko.
- Na elegantnejši in hitrejši način nadomesti evklidsko geometrijo, ki je le ena od možnih geometrij.
- Praksa: Prostorska geometrija skoraj izgine. Trigonometrija postane del sklopa elementarnih funkcij. Vektorji se obravnavajo kot algebrska struktura.
- Rezultat: **katastrofa**. Več deset generacij dijakov ne razvije geometrijske intuicije. Leta 1962 skupina 75 izjemnih matematikov podpiše memorandum in pozove k bistvenim spremembam. Morris Kline: *Why Johnny Can't Add*

Poučevanje geometrije z Novo matematiko

- Vesoljska tekma prinese Novo matematiko.
- Na elegantnejši in hitrejši način nadomesti evklidsko geometrijo, ki je le ena od možnih geometrij.
- Praksa: Prostorska geometrija skoraj izgine. Trigonometrija postane del sklopa elementarnih funkcij. Vektorji se obravnavajo kot algebrska struktura.
- Rezultat: **katastrofa**. Več deset generacij dijakov ne razvije geometrijske intuicije. Leta 1962 skupina 75 izjemnih matematikov podpiše memorandum in pozove k bistvenim spremembam. Morris Kline: *Why Johnny Can't Add*

Poučevanje geometrije z Novo matematiko

- Vesoljska tekma prinese Novo matematiko.
- Na elegantnejši in hitrejši način nadomesti evklidsko geometrijo, ki je le ena od možnih geometrij.
- Praksa: Prostorska geometrija skoraj izgine. Trigonometrija postane del sklopa elementarnih funkcij. Vektorji se obravnavajo kot algebrska struktura.
- Rezultat: **katastrofa**. Več deset generacij dijakov ne razvije geometrijske intuicije. Leta 1962 skupina 75 izjemnih matematikov podpiše memorandum in pozove k bistvenim spremembam. Morris Kline: *Why Johnny Can't Add*

Kako učiti geometrijo?

Μη είναι βασιλικήν ατραπόν επί γεωμετρίαν

μτφρ: δεν υπάρχει σύντομος δρόμος για να μάθεις γεωμετρία.

Ευκλείδης,4-3ος αιώνπ.Χ.

Αλεξανδρινός μαθηματικός

Dileme

- Kako krmariti med intuicijo, uporabno vrednostjo in matematično strogostjo?
- Ali je smiselno različno sposobne dijake peljati po različnih poteh v geometrijo?
- Ali bistven napredek pri poučevanju predstavljajo računalniški programi za dinamično geometrijo?

Dileme

- Kako krmariti med intuicijo, uporabno vrednostjo in matematično strogostjo?
- Ali je smiselno različno sposobne dijake peljati po različnih poteh v geometrijo?
- Ali bistven napredek pri poučevanju predstavljajo računalniški programi za dinamično geometrijo?

Dileme

- Kako krmariti med intuicijo, uporabno vrednostjo in matematično strogostjo?
- Ali je smiselno različno sposobne dijake peljati po različnih poteh v geometrijo?
- Ali bistven napredek pri poučevanju predstavljajo računalniški programi za dinamično geometrijo?

Ideje

- Razvoju geometrijske predstave morda lahko sledimo, tako da učence vodimo pri eksperimentiranju z geometrijskimi legami. Tako nekateri učenci sami odkrijejo enostavne trditve. Nekateri najprej ugotovijo, da trditve veljajo v vseh legah in pri vseh velikostih in nato začutijo tudi potrebo po dokazu.
- Pot, ki mi jo je pokazala prof. Olga Arnuš: Aksiomatski del do skladnosti naredimo zelo liberalno. Nekateri dijaki lahko v njem vidijo zanimiv kos starogrške zgodovine, drugi zaznajo matematični model. Po aksiomih skladnosti bolj stroga obravnava.
- Prikaz bistveno različnih pristopov pri obravnavi problema: od eksperimenta (papir, računalniški program) do različnih matematičnih metod, ki so na voljo: klasična evklidska geometrija, koordinatni sistem, vektorji, kompleksna števila, transformacije, ... Vsak dokaz da drugačen uvid v matematiko.

Ideje

- Razvoju geometrijske predstave morda lahko sledimo, tako da učence vodimo pri eksperimentiranju z geometrijskimi legami. Tako nekateri učenci sami odkrijejo enostavne trditve. Nekateri najprej ugotovijo, da trditve veljajo v vseh legah in pri vseh velikostih in nato začutijo tudi potrebo po dokazu.
- Pot, ki mi jo je pokazala prof. Olga Arnuš: Aksiomatski del do skladnosti naredimo zelo liberalno. Nekateri dijaki lahko v njem vidijo zanimiv kos starogrške zgodovine, drugi zaznajo matematični model. Po aksiomih skladnosti bolj stroga obravnava.
- Prikaz bistveno različnih pristopov pri obravnavi problema: od eksperimenta (papir, računalniški program) do različnih matematičnih metod, ki so na voljo: klasična evklidska geometrija, koordinatni sistem, vektorji, kompleksna števila, transformacije, ... Vsak dokaz da drugačen uvid v matematiko.

Ideje

- Razvoju geometrijske predstave morda lahko sledimo, tako da učence vodimo pri eksperimentiranju z geometrijskimi legami. Tako nekateri učenci sami odkrijejo enostavne trditve. Nekateri najprej ugotovijo, da trditve veljajo v vseh legah in pri vseh velikostih in nato začutijo tudi potrebo po dokazu.
- Pot, ki mi jo je pokazala prof. Olga Arnuš: Aksiomatski del do skladnosti naredimo zelo liberalno. Nekateri dijaki lahko v njem vidijo zanimiv kos starogrške zgodovine, drugi zaznajo matematični model. Po aksiomih skladnosti bolj stroga obravnava.
- Prikaz bistveno različnih pristopov pri obravnavi problema: od eksperimenta (papir, računalniški program) do različnih matematičnih metod, ki so na voljo: klasična evklidska geometrija, koordinatni sistem, vektorji, kompleksna števila, transformacije, ... Vsak dokaz da drugačen uvid v matematiko.

Ideje

- Razvoju geometrijske predstave morda lahko sledimo, tako da učence vodimo pri eksperimentiranju z geometrijskimi legami. Tako nekateri učenci sami odkrijejo enostavne trditve. Nekateri najprej ugotovijo, da trditve veljajo v vseh legah in pri vseh velikostih in nato začutijo tudi potrebo po dokazu.
- Pot, ki mi jo je pokazala prof. Olga Arnuš: Aksiomatski del do skladnosti naredimo zelo liberalno. Nekateri dijaki lahko v njem vidijo zanimiv kos starogrške zgodovine, drugi zaznajo matematični model. Po aksiomih skladnosti bolj stroga obravnava.
- Prikaz bistveno različnih pristopov pri obravnavi problema: od eksperimenta (papir, računalniški program) do različnih matematičnih metod, ki so na voljo: klasična evklidska geometrija, koordinatni sistem, vektorji, kompleksna števila, transformacije, ... Vsak dokaz da drugačen uvid v matematiko.

Ideje

- Razvoju geometrijske predstave morda lahko sledimo, tako da učence vodimo pri eksperimentiranju z geometrijskimi legami. Tako nekateri učenci sami odkrijejo enostavne trditve. Nekateri najprej ugotovijo, da trditve veljajo v vseh legah in pri vseh velikostih in nato začutijo tudi potrebo po dokazu.
- Pot, ki mi jo je pokazala prof. Olga Arnuš: Aksiomatski del do skladnosti naredimo zelo liberalno. Nekateri dijaki lahko v njem vidijo zanimiv kos starogrške zgodovine, drugi zaznajo matematični model. Po aksiomih skladnosti bolj stroga obravnava.
- Prikaz bistveno različnih pristopov pri obravnavi problema: od eksperimenta (papir, računalniški program) do različnih matematičnih metod, ki so na voljo: klasična evklidska geometrija, koordinatni sistem, vektorji, kompleksna števila, transformacije, ... Vsak dokaz da drugačen uvid v matematiko.

Ideje

- Razvoju geometrijske predstave morda lahko sledimo, tako da učence vodimo pri eksperimentiranju z geometrijskimi legami. Tako nekateri učenci sami odkrijejo enostavne trditve. Nekateri najprej ugotovijo, da trditve veljajo v vseh legah in pri vseh velikostih in nato začutijo tudi potrebo po dokazu.
- Pot, ki mi jo je pokazala prof. Olga Arnuš: Aksiomatski del do skladnosti naredimo zelo liberalno. Nekateri dijaki lahko v njem vidijo zanimiv kos starogrške zgodovine, drugi zaznajo matematični model. Po aksiomih skladnosti bolj stroga obravnava.
- Prikaz bistveno različnih pristopov pri obravnavi problema: od eksperimenta (papir, računalniški program) do različnih matematičnih metod, ki so na voljo: klasična evklidska geometrija, koordinatni sistem, vektorji, kompleksna števila, transformacije, ... Vsak dokaz da drugačen uvid v matematiko.

Ideje

- Razvoju geometrijske predstave morda lahko sledimo, tako da učence vodimo pri eksperimentiranju z geometrijskimi legami. Tako nekateri učenci sami odkrijejo enostavne trditve. Nekateri najprej ugotovijo, da trditve veljajo v vseh legah in pri vseh velikostih in nato začutijo tudi potrebo po dokazu.
- Pot, ki mi jo je pokazala prof. Olga Arnuš: Aksiomatski del do skladnosti naredimo zelo liberalno. Nekateri dijaki lahko v njem vidijo zanimiv kos starogrške zgodovine, drugi zaznajo matematični model. Po aksiomih skladnosti bolj stroga obravnava.
- Prikaz bistveno različnih pristopov pri obravnavi problema: od eksperimenta (papir, računalniški program) do različnih matematičnih metod, ki so na voljo: klasična evklidska geometrija, koordinatni sistem, vektorji, kompleksna števila, transformacije, ... Vsak dokaz da drugačen uvid v matematiko.

Ideje

- Razvoju geometrijske predstave morda lahko sledimo, tako da učence vodimo pri eksperimentiranju z geometrijskimi legami. Tako nekateri učenci sami odkrijejo enostavne trditve. Nekateri najprej ugotovijo, da trditve veljajo v vseh legah in pri vseh velikostih in nato začutijo tudi potrebo po dokazu.
- Pot, ki mi jo je pokazala prof. Olga Arnuš: Aksiomatski del do skladnosti naredimo zelo liberalno. Nekateri dijaki lahko v njem vidijo zanimiv kos starogrške zgodovine, drugi zaznajo matematični model. Po aksiomih skladnosti bolj stroga obravnava.
- Prikaz bistveno različnih pristopov pri obravnavi problema: od eksperimenta (papir, računalniški program) do različnih matematičnih metod, ki so na voljo: klasična evklidska geometrija, koordinatni sistem, vektorji, kompleksna števila, transformacije, ... Vsak dokaz da drugačen uvid v matematiko.

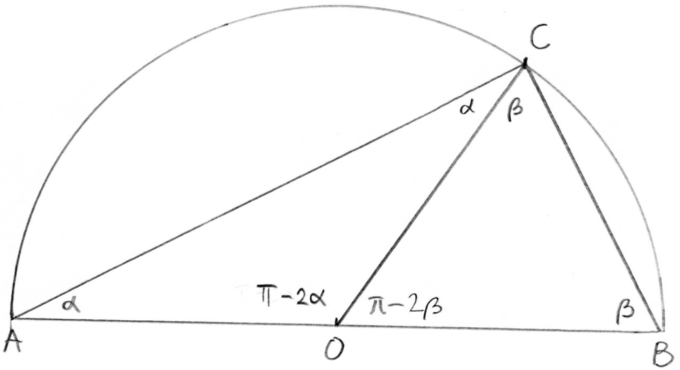
Ideje

- Razvoju geometrijske predstave morda lahko sledimo, tako da učence vodimo pri eksperimentiranju z geometrijskimi legami. Tako nekateri učenci sami odkrijejo enostavne trditve. Nekateri najprej ugotovijo, da trditve veljajo v vseh legah in pri vseh velikostih in nato začutijo tudi potrebo po dokazu.
- Pot, ki mi jo je pokazala prof. Olga Arnuš: Aksiomatski del do skladnosti naredimo zelo liberalno. Nekateri dijaki lahko v njem vidijo zanimiv kos starogrške zgodovine, drugi zaznajo matematični model. Po aksiomih skladnosti bolj stroga obravnava.
- Prikaz bistveno različnih pristopov pri obravnavi problema: od eksperimenta (papir, računalniški program) do različnih matematičnih metod, ki so na voljo: klasična evklidska geometrija, koordinatni sistem, vektorji, kompleksna števila, transformacije, ... Vsak dokaz da drugačen uvid v matematiko.

Ideje

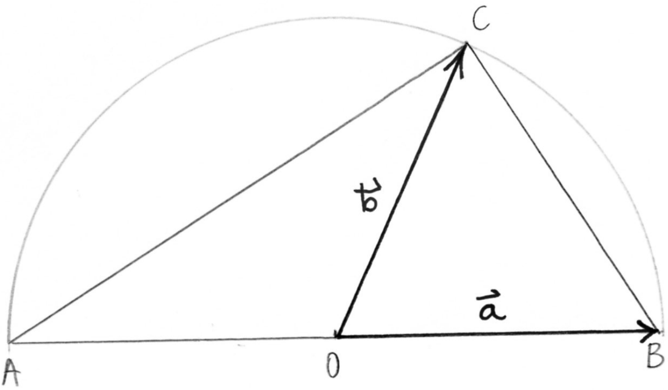
- Razvoju geometrijske predstave morda lahko sledimo, tako da učence vodimo pri eksperimentiranju z geometrijskimi legami. Tako nekateri učenci sami odkrijejo enostavne trditve. Nekateri najprej ugotovijo, da trditve veljajo v vseh legah in pri vseh velikostih in nato začutijo tudi potrebo po dokazu.
- Pot, ki mi jo je pokazala prof. Olga Arnuš: Aksiomatski del do skladnosti naredimo zelo liberalno. Nekateri dijaki lahko v njem vidijo zanimiv kos starogrške zgodovine, drugi zaznajo matematični model. Po aksiomih skladnosti bolj stroga obravnava.
- Prikaz bistveno različnih pristopov pri obravnavi problema: od eksperimenta (papir, računalniški program) do različnih matematičnih metod, ki so na voljo: klasična evklidska geometrija, koordinatni sistem, vektorji, kompleksna števila, transformacije, ... Vsak dokaz da drugačen uvid v matematiko.

Thalesov izrek, elementarno



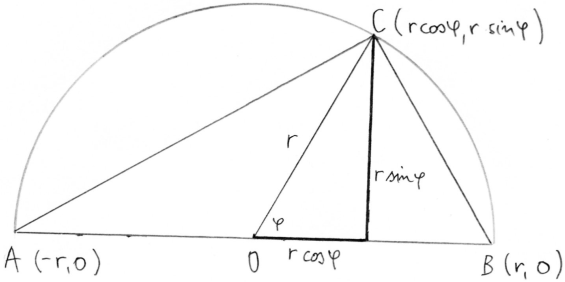
$$(\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta) = \pi$$

Thalesov izrek, vektorji



$$\vec{CB} \cdot \vec{CA} = (\vec{a} - \vec{b})(-\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$$

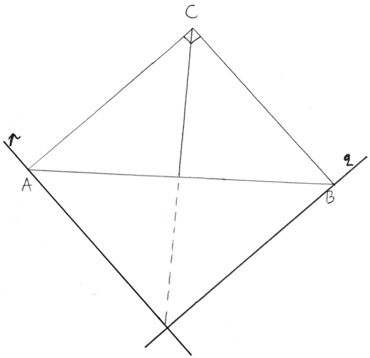
Thalesov izrek, koordinatni sistem



$$k_{AC} = \frac{r\sin\varphi - 0}{r\cos\varphi + r}, \; k_{BC} = \frac{r\sin\varphi - 0}{r\cos\varphi - r}$$

$$k_{AC}k_{BC} = \frac{r^2\sin^2\varphi}{r^2(\cos^2\varphi - 1)} = -1$$

Obrat Thalesovega izrek, transformacije



$$A \in p,\ p||BC,\ B \in q,\ q||AC,\ D = p \cap q$$

ADBC pravokotnik s presekom diagonal *O*