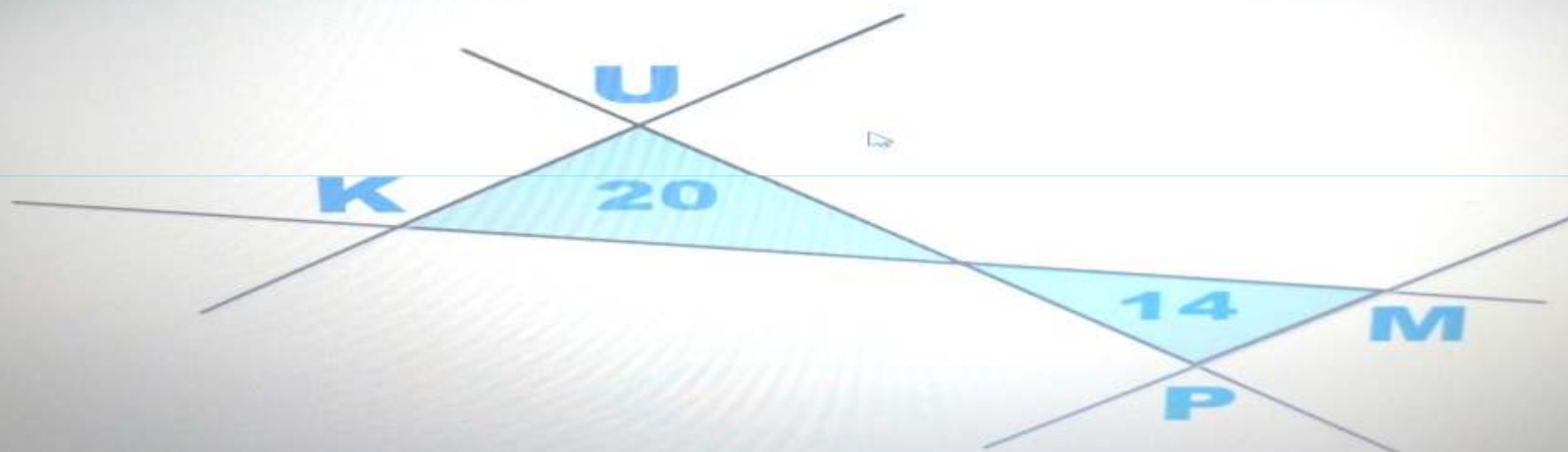
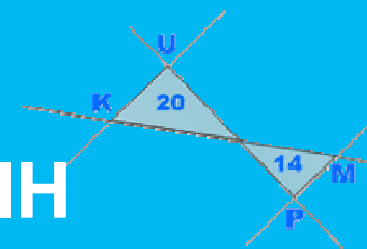
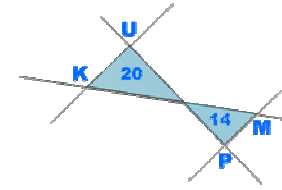


# KAKO UČENICI RAZUMIJU I PRIMJENJUJU GRAFOVE LINEARNIH FUNKCIJA U MATEMATICI I FIZICI?

ŽELJKA MILIN ŠIPUŠ

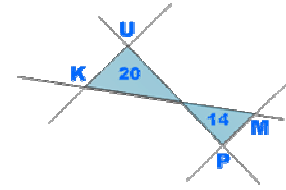


Zavod Republike Slovenije za šolstvo  
The National Education Institute Slovenia



# MATEMATIKA I FIZIKA

- Zašto učenici/studenti ne mogu primijeniti u fizici pojmove naučene u matematici?
  - nastavnici često tvrde da “učenici/studenti nemaju dovoljno matematičkog znanja”
- Koliko tome doprinosi nedostatak koordinacije između nastavnih planova i programa matematike i fizike?
  - raskorak/jaz (eng. “gap”) između matematike i fizike
- Postoji li adekvatno povezivanje potrebnih pojmova u matematici i fizici?



# MATEMATIKA I FIZIKA

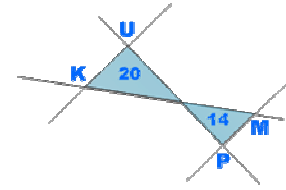
PRIMJER: Temperatura metalne okrugle pločice dana je s

$$T(x,y) = k(x^2+y^2),$$

gdje je  $k$  konstanta.

Koliko je  $T(r, \varphi)$ ?





# MATEMATIKA I FIZIKA

PRIMJER: Temperatura metalne okrugle pločice dana je s

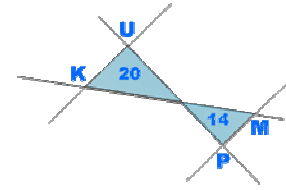
$$T(x,y) = k(x^2+y^2),$$

gdje je  $k$  konstanta.

Koliko je  $T(r, \varphi)$ ?



A.  $T(r, \varphi) = kr^2$



# MATEMATIKA I FIZIKA

PRIMJER: Temperatura metalne okrugle pločice dana je s

$$T(x,y) = k(x^2+y^2),$$

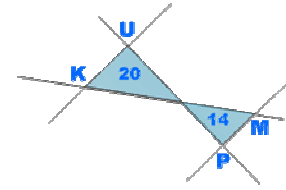
gdje je  $k$  konstanta.

Koliko je  $T(r, \varphi)$ ?



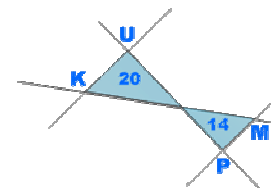
A.  $T(r, \varphi) = kr^2$

B.  $T(r, \varphi) = k(r^2 + \varphi^2)$



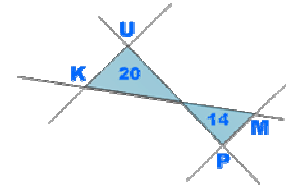
# MATEMATIKA I FIZIKA

- Svaka disciplina ima svoje tzv. ***disciplinske konvencije***
- Drugim riječima: svaka disciplina ima svoj jezik i dogovore, a od učenika/studenata se očekuje da odgovaraju na postavljene probleme u skladu s time
- Koje su učeničke poteškoće u korištenju matematičkih pojmova u međudisciplinskom kontekstu matematike i fizike?
- Radi li se tu o *transferu znanja*?



# MATEMATIKA I FIZIKA

- Vektori
- Matematičke formule kao fizikalni zakoni
  - Matematički model
- Funkcijske veze (funkcije više varijabli)
  - Proporcionalne veličine
- Koordinatni sustavi
- Mjerne jedinice (dimenzijski račun)
- **BRZINA (STOPA) PROMJENE vs. UKUPNA PROMJENA**
- **GRAFIČKI PRIKAZ**



# GRAFIČKI PRIKAZ

## HNOS, 7. razred osnovne šole, 2004.

- Crtati graf i očitati točke grafa linearne funkcije
- Opisivati ovisnost dviju veličina pomoću formule, tablice, grafa i riječima
- Usvojiti značenje nagiba pravca i odsječka na osi y i njihovu geometrijsku interpretaciju
- Ispitivati rast ili pad linearne funkcije prema nagibu pravca

## NOK, 2010.

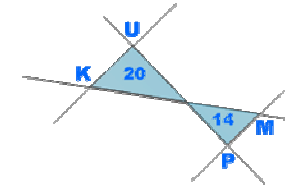
## SVJETSKA ISTRAŽIVANJA

Woolnough, J. (2000). *How do students learn to apply their mathematical knowledge to interpret graphs in physics?*, Research in Science Education 30 (3).

McDermott L. C., Rosenquist M. L and van Zee E. H., (1987). *Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics*, Am. J. Phys. 55 (6).

Beichner R. J. (1994). *Testing student interpretation of kinematics graphs*, Am. J. Phys. 62, 750.





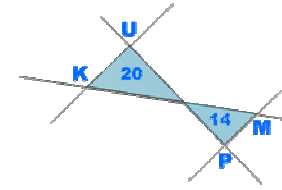
# MATEMATIKA I FIZIKA

Istraživački projekt Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta RH br. 119-0091361-1027.

## Edukacijska istraživanja u fizici i matematici

voditelj dr. sc. Maja Planinić

- Maja Planinić, Željka Milin Šipuš, Helena Katić, Lana Ivanjek, Ana Sušac, ***Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics***, International Journal of Science and Mathematics Education, 2012,1393-1414.
- Maja Planinić, Ana Sušac, Lana Ivanjek, Željka Milin Šipuš, ***Comparison of university students' understanding of graphs in different contexts***, Physical review special topics - Physics education research 9, 2013.
- Lana Ivanjek, Ana Sušac, Maja Planinić, Željka Milin Šipuš, Aneta Andrašević, ***Student reasoning about graphs in different contexts***, u pripremi.



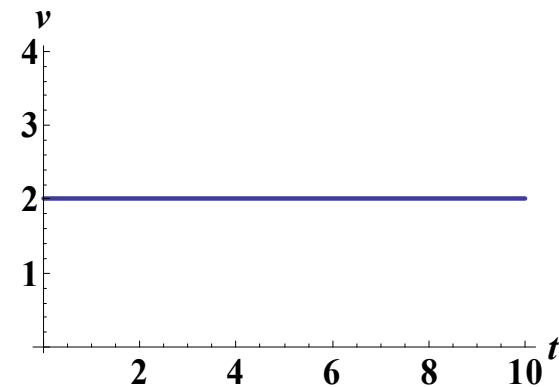
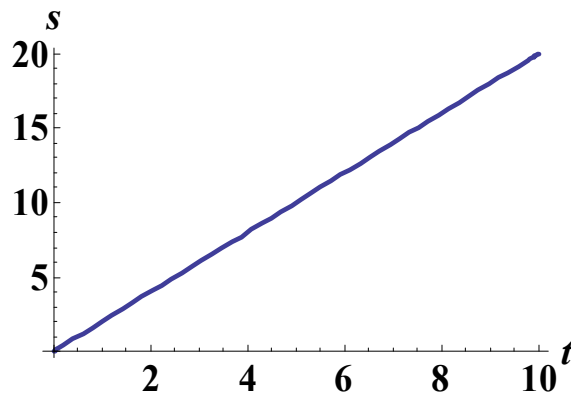
# KINEMATIKA – JEDNOSTAVNI MODELI

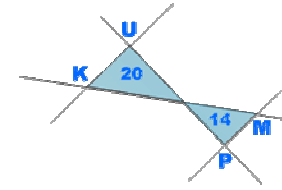
## JEDNOLIKO GIBANJE PO PRAVCU

$$s = vt$$

$$v = \text{const.}$$

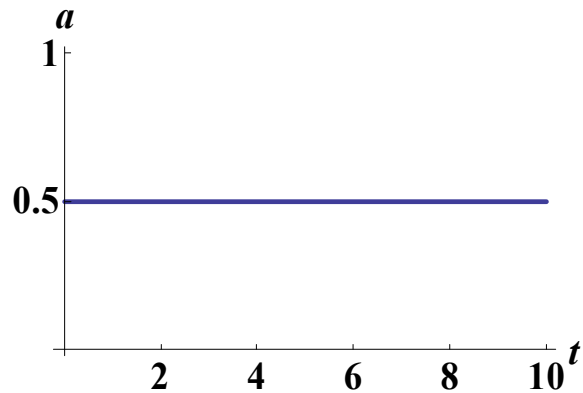
= u svakom vremenskom intervalu prosječna brzina je jednaka  $v$ .





# KINEMATIKA – JEDNOSTAVNI MODELI

## JEDNOLIKO UBRZANO GIBANJE PO PRAVCU

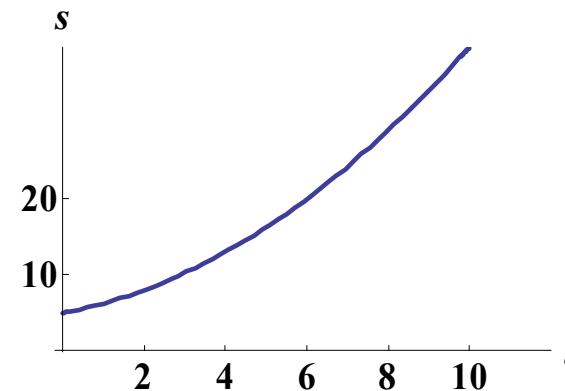
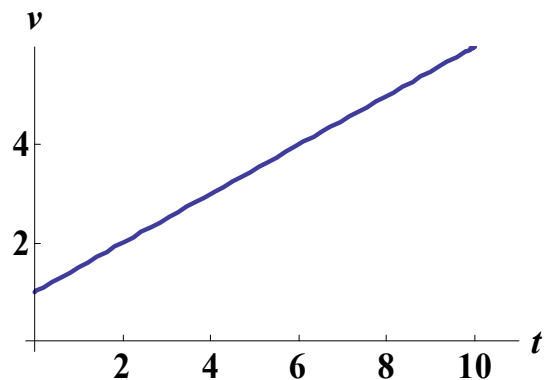


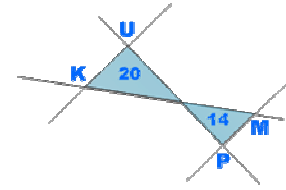
$$a = \text{const.}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$v = at + v_0$$

$$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0$$





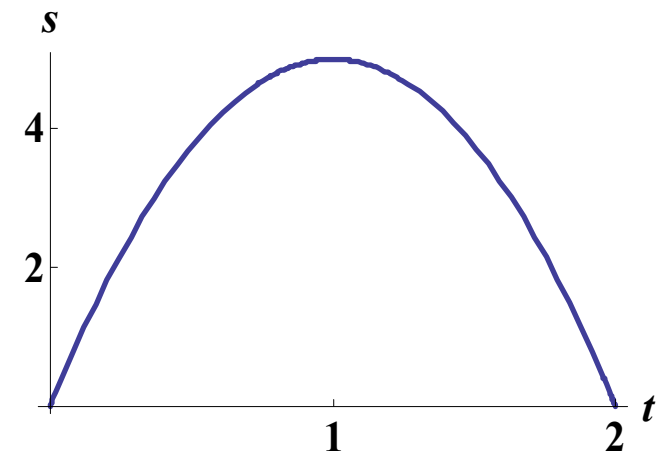
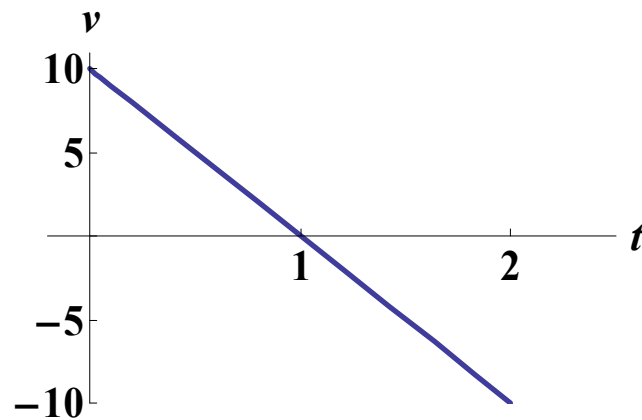
## PRIMJER - VERTIKALNI HITAC

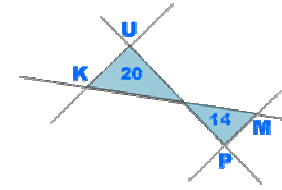
Tijelo je izbačeno početnom brzinom  $v_0 = 10 \text{ m/s}$  vertikalno uvis.

$$a = g \approx 10 \text{ m/s}^2$$

$$v = v_0 - gt = 10 - 10t$$

$$s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 = 10t - 5t^2$$

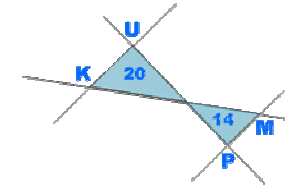




# KINEMATIKA – JEDNOSTAVNI MODELI

## FIZIKALNE VELIČINE

- prijeđeni put/pomak
- prosječna/srednja/trenutna brzina
- akceleracija



# BRZINA PROMJENE I UKUPNA PROMJENA

## I ŠTO MOŽEMO SAZNATI IZ GRAFIČKOG PRIKAZA?

- **Brzina (stopa) promjene** veličine  $s$  (*pomak u gibanju po pravcu*) u odnosu na  $t$  (vrijeme)

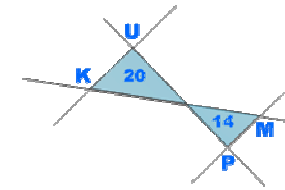
$$\frac{ds}{dt} = v(t)$$

(eng. rate of change)

- **Ukupna promjena** veličine  $s$  (pomaka) od  $t = a$  do  $t = b$

$$\Delta S = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$$

(eng. total change)



# BRZINA PROMJENE

## I ŠTO MOŽEMO SAZNATI IZ GRAFIČKOG PRIKAZA?

PRIMJER: Kod jednolikog gibanja po pravcu u  $s$ - $t$  grafu brzina  $v$  je **koeficijent smjera/nagib pravca**

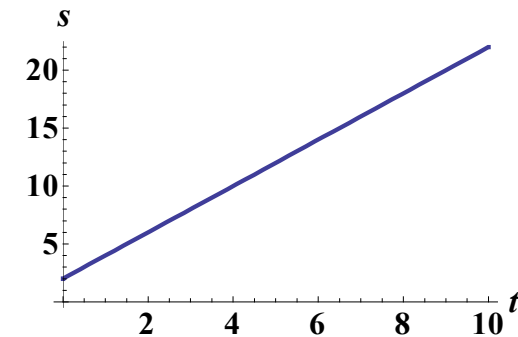
Nagib = koeficijent smjera  $v$

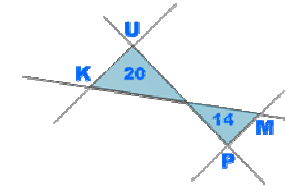
$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\text{uspon/hod, eng. rise over run})$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \text{tg } \alpha$$

= brzina promjene



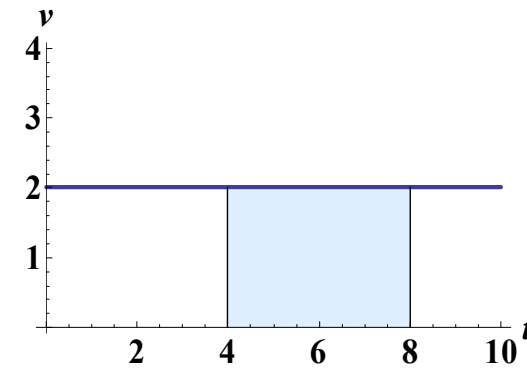


# UKUPNA PROMJENA

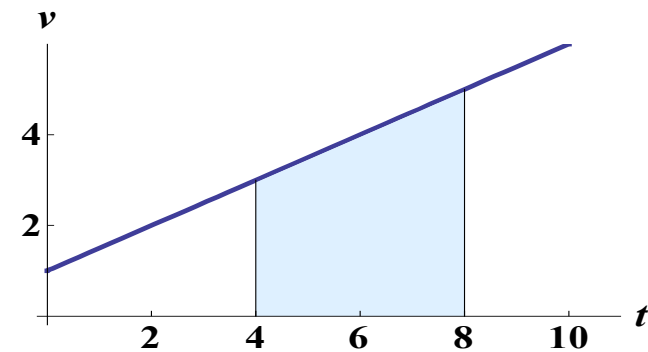
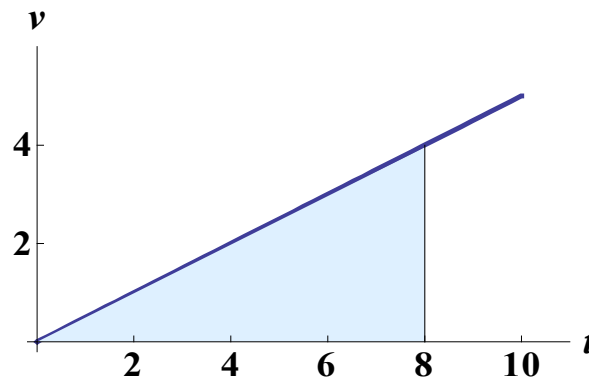
## I ŠTO MOŽEMO SAZNATI IZ GRAFIČKOG PRIKAZA?

PRIMJER: Kod jednolikog gibanja i jednolikoubrzanog gibanja po pravcu u  $v$ - $t$  grafu ukupni prevaljeni pomak je **površina ispod grafa**.

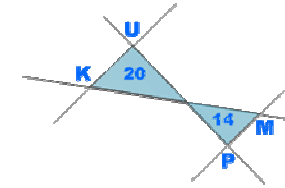
$$s = vt$$



$$s = \frac{a}{2} t^2 = \frac{vt}{2}$$

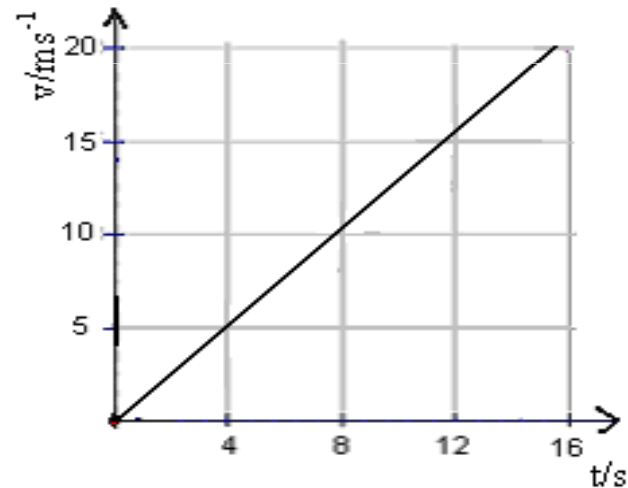




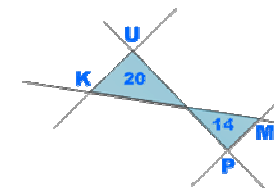


# FIZIKA – ŠTO MOŽEMO NAUČITI?

1. Automobil se giba po ravnoj cesti 20 sekundi. Njegovo gibanje prikazano je pomoću  $v$ - $t$  grafa. Kolika je brzina automobila nakon prve 4 sekunde gibanja?

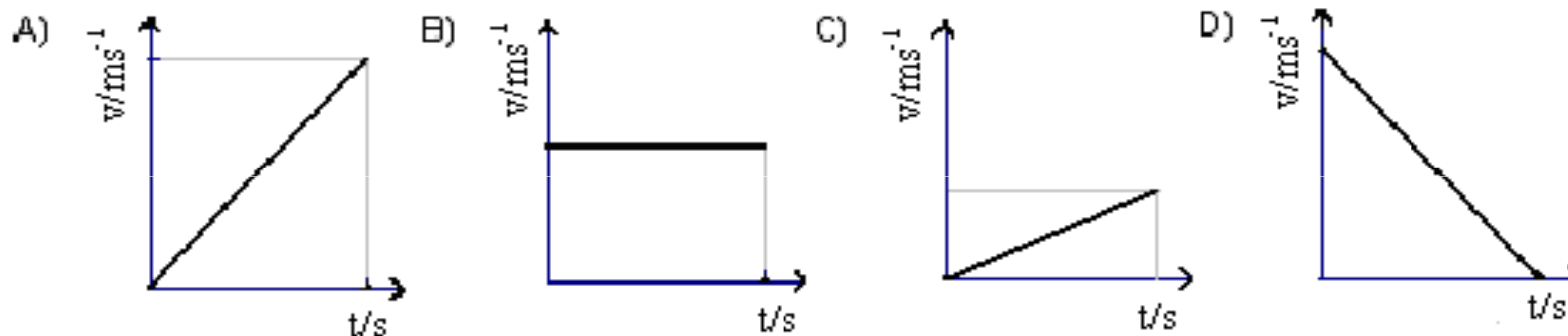


Očitati vrijednosti s grafa

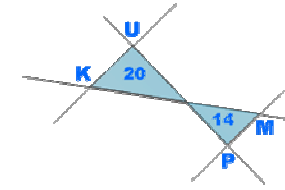


# FIZIKA – ŠTO MOŽEMO NAUČITI?

2. Koji od grafova predstavljaju gibanja stalnom brzinom?

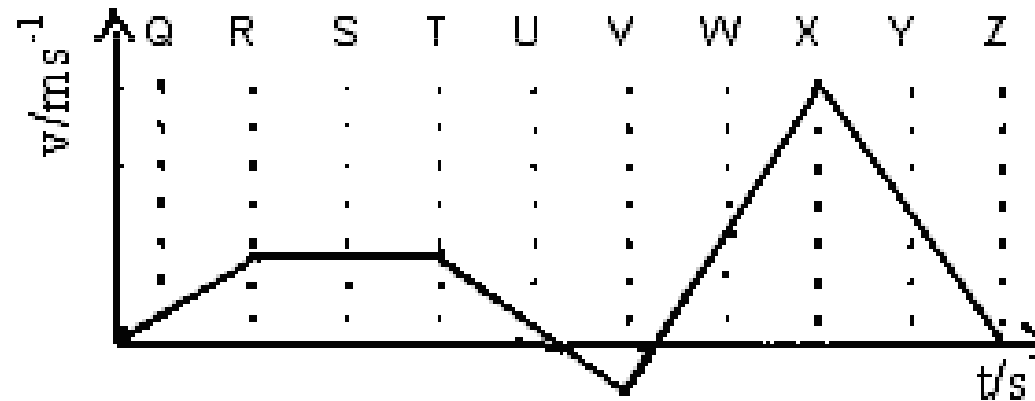


Interpretirati nagib grafa

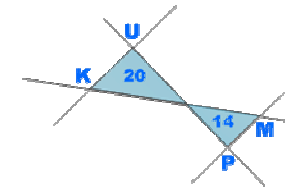


# FIZIKA – ŠTO MOŽEMO NAUČITI?

3. Kada je u gibanju opisanom ovim  $v-t$  grafom akceleracija najnegativnija?

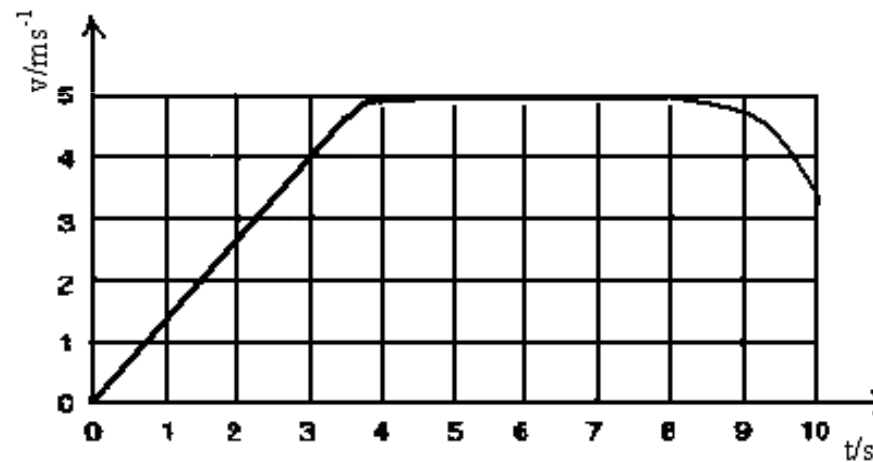


Interpretirati nagib grafa

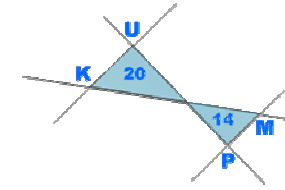


# FIZIKA – ŠTO MOŽEMO NAUČITI?

4. Dizalo se giba od podruma do desetog kata zgrade, a gibanje mu je opisano  $v-t$  grafom na slici. Koliki put dizalo prijeđe u prve tri sekunde gibanja?

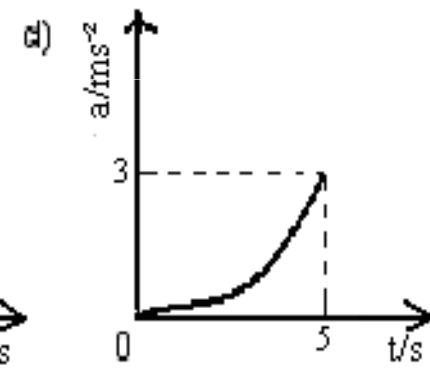
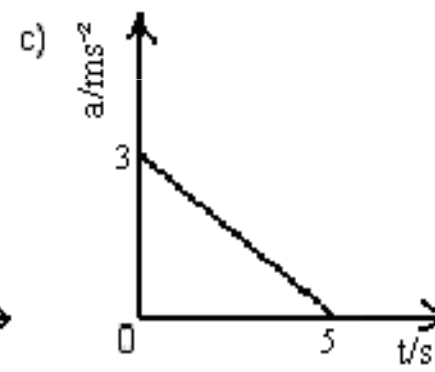
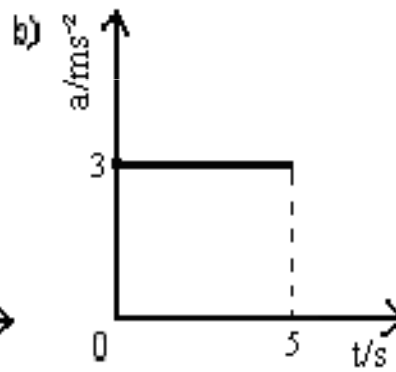
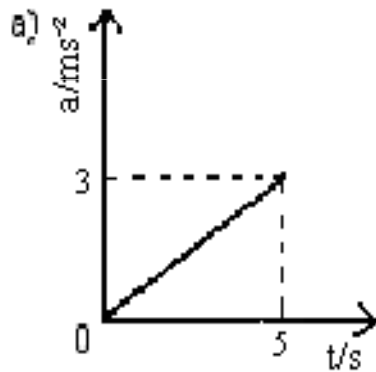


Odrediti i interpretirati ukupnu promjenu (površinu ispod grafa)

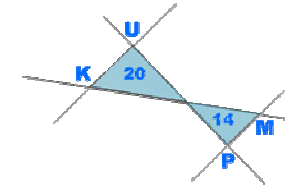


# FIZIKA – ŠTO MOŽEMO NAUČITI?

5. Prikazani su  $a-t$  grafovi za četiri različita tijela koja se gibaju. Koje tijelo ima najveću promjenu brzine tijekom prikazanih 5 sekundi gibanja?

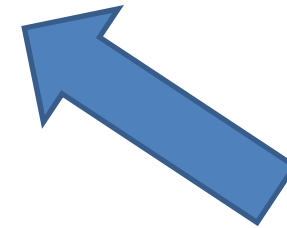


Odrediti i interpretirati ukupnu promjenu (površinu ispod grafa)

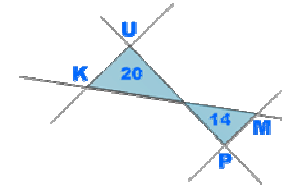


## BRZINA JE NAGIB u $s-t$ GRAFU

“Čini se da studenti imaju poteškoće pri interpretiranju pojmova koji proizlaze iz varijabli koju nisu direktno prikazane na grafu.”



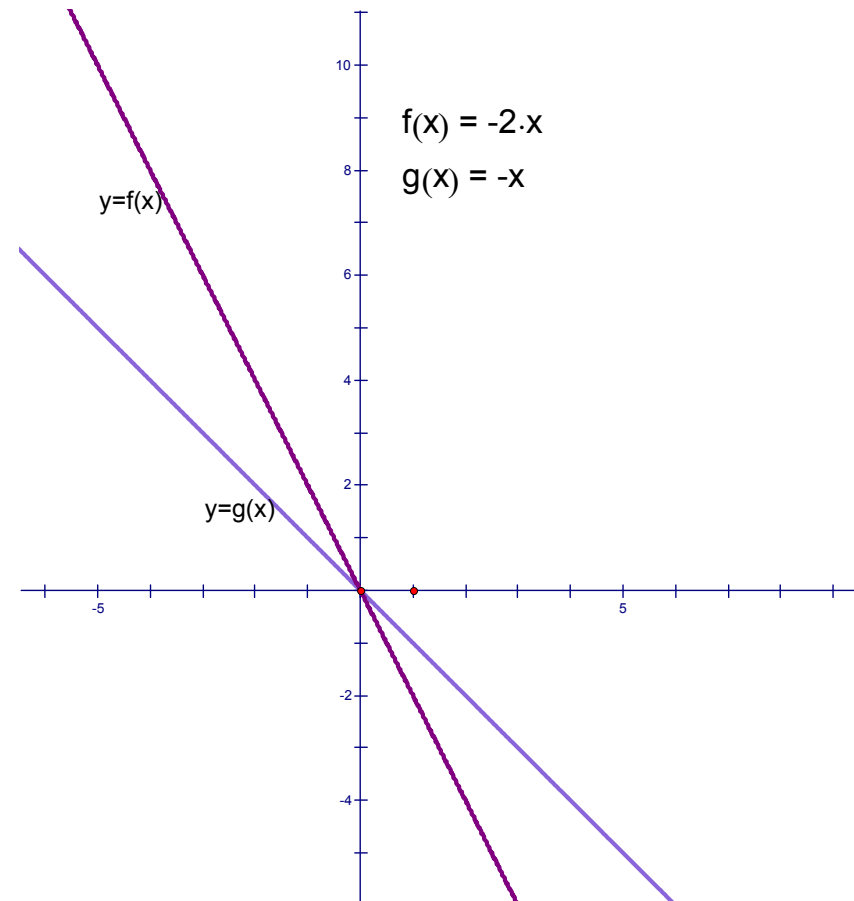
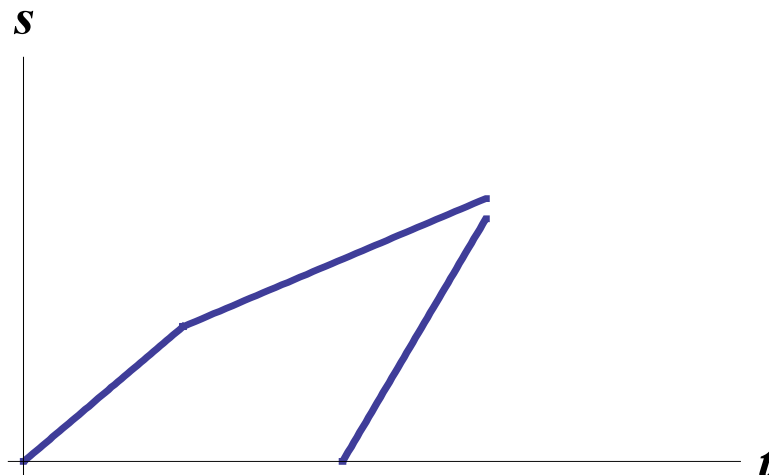
Leinhardt G., Zaslavsky O., Stein M., (1990). **Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching**, Review of Educational Research, 60, 37-42.

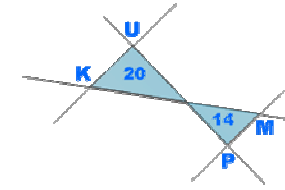


# BRZINA JE NAGIB u $s-t$ GRAFU

## MATEMATIKA – NAGIB

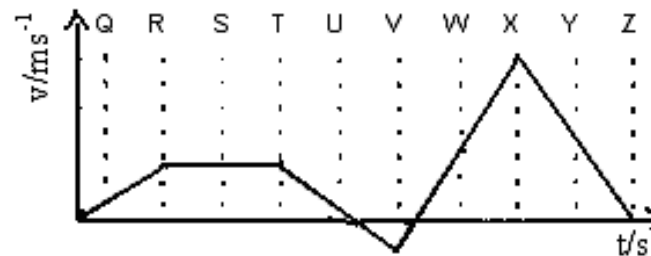
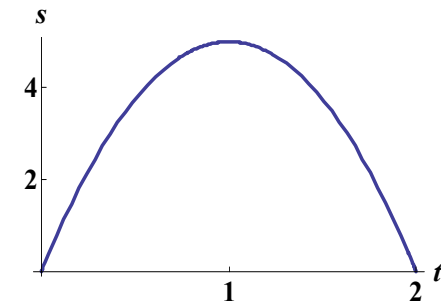
- izračunati nagib
- uspoređivati nagibe
- interpretirati nagib





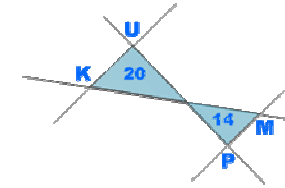
# GRAFIČKI PRIKAZ -POZNATE POTEŠKOĆE

- Tretiranje grafa kao slike neke situacije
- Nerazlikovanje nagiba i visine grafa



- Interpretacija promjene visine i promjene nagiba grafa



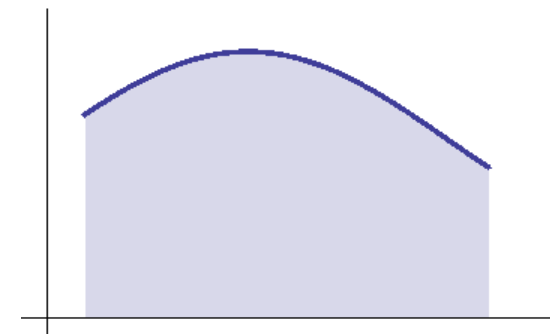


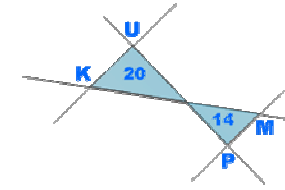
# UKUPNA PROMJENA

- **Ukupna promjena veličine  $s$  = “površina ispod grafa” veličine  $v$**

$$\frac{ds}{dt} = v(t) \quad \Delta S = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$$

- Povezuje pojmove derivacije i određenog integrala, te antiderivacije/neodređenog integrala
- Riemannove sume
- “Negativna površina”?





# UKUPNA PROMJENA

- Osnovni teorem infinitezimalnog računa (Newton-Leibnitzova formula)

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

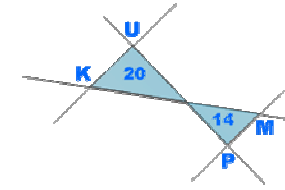
pri čemu je  $F$  diferencijabilna, a  $F'$  je integrabilna funkcija na  $[a, b]$ .

- Odnosno

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x).$$

- Ili za neprekidnu funkciju  $f$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

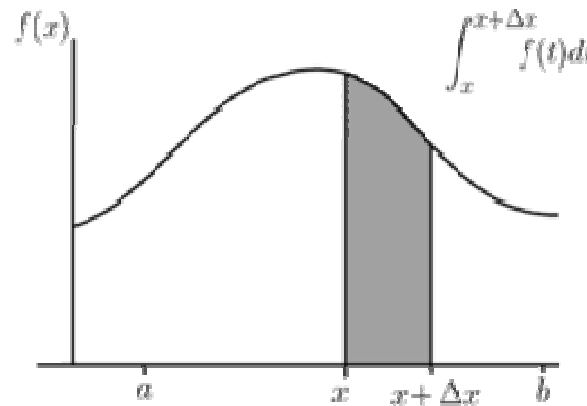


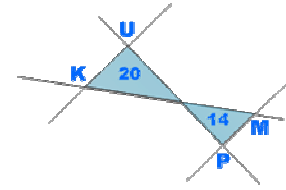
# UKUPNA PROMJENA

Neka je  $P(x)$  funkcija definirana kao mjera površine ispod grafa funkcije  $y = f(x)$ ,

$$\Delta P = P(x + \Delta x) - P(x) \approx f(x) \Delta x$$

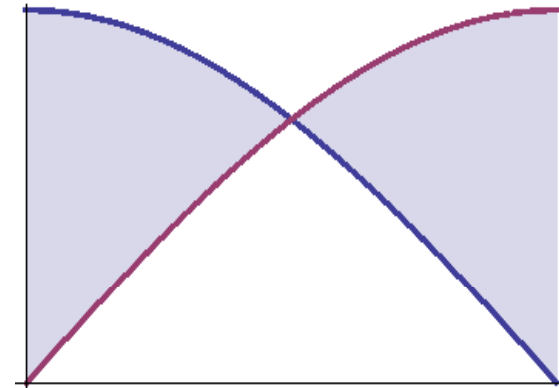
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} = f(x)$$

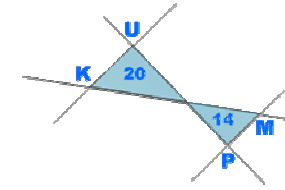




# POVRŠINA ISPOD GRAFA

- MATEMATIKA: primjerice, za određivanje površine između krivulja
- FIZIKA: definirana je jedna fizikalna veličina!
- Učenička poteškoća s mjernim jedinicama!





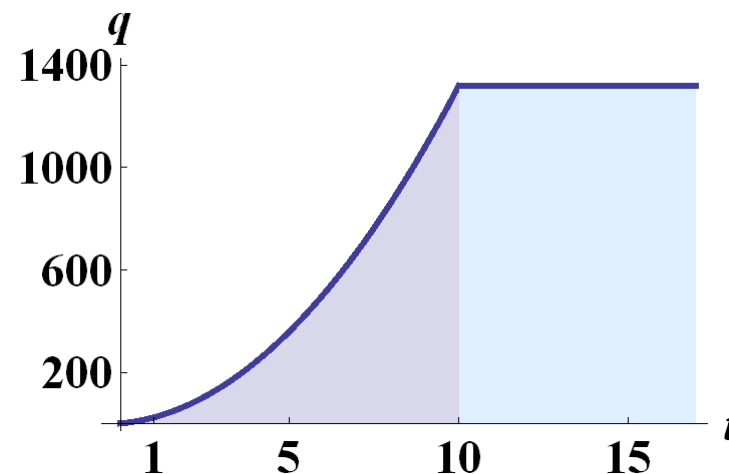
# PRIMJER

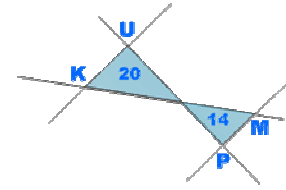
Bazen se puni vodom iz cijevi kojom u trenutku  $t$  prolazi  $12(t^2 + t)$  litara vode u minuti.

Dakle, brzina istjecanja vode raste s vremenom. **Brzina istjecanja  $q$**  prestaje rasti kada dosegne vrijednost od 1320 litara u minuti. Od tog trenutka brzina istjecanja ima tu konstantnu vrijednost.

S koliko se vode bazen napuni do trenutka u kojem počinje maksimalna brzina istjecanja?

Koliko treba vremena da se **napuni bazen** od 783 400 litara?





# AKUMULACIJA VELIČINE

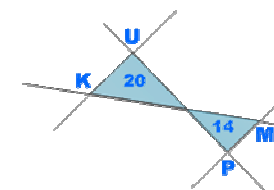
Funkcija akumulacije (može biti vrednovana u  $x = b$ )

$$\int_a^x f(t) dt$$

omogućuje uspostavljanje veze između **brzine promjene veličine** i **akumuliranja veličine**.

Ideja akumulacije uključuje:

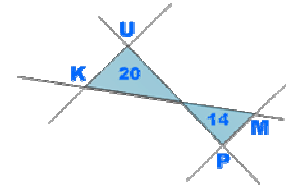
- “djeliće” veličine koja se akumulira (put, brzina, rad, količina vode, visina biljke,...)
- brzinu kojom se akumulira (brzina/stopa promjene, rate of change)



# ISTRAŽIVANJA

## PRVO ISTRAŽIVANJE

- Provedeno u drugom razredu srednje škole na uzorku od 114 učenika
- U školama:
  - dvije opće gimnazije,
  - jedna prirodoslovno-matematička gimnazija,
  - jedna tehnička strukovna škola.
- Test od 16 “paralelnih” zadataka višestrukog izbora:
  - 8 zadataka iz kinematike,
  - 8 zadataka iz matematike (eng. stripped from the context)
- Učenici su pisali objašnjenja za svoje odgovore
- Cilj je bio utvrditi je li **nedovoljno znanje iz matematike glavni razlog** zašto se javljaju poteškoće kod interpretiranja grafova iz kinematike te postoje li **poteškoće** u kontekstu matematike odnosno fizike u:
  - očitavanju vrijednosti s grafa
  - interpretaciji nagiba grafa
  - određivanju i interpretaciji ukupne promjene/površine ispod grafa.

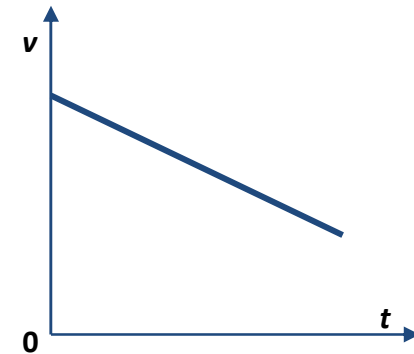


## PRIMJER

Gibanje tijela prikazano je  $v-t$  grafom kao na slici. Koja tvrdnja najbolje opisuje prikazano gibanje?

- A. Tijelo se giba konstantnom rastućom akceleracijom.
- B. Tijelo se giba konstantnom padajućom akceleracijom.
- C. Tijelo se giba konstantnom pozitivnom akceleracijom.
- D. Tijelo se giba konstantnom negativnom akceleracijom.

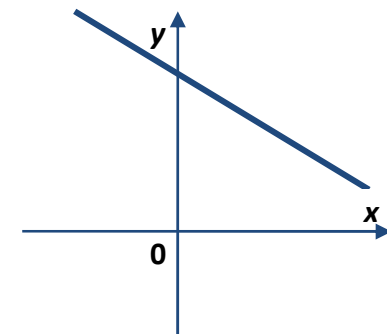
(Nerazlikovanje nagiba i visine grafa 68%)



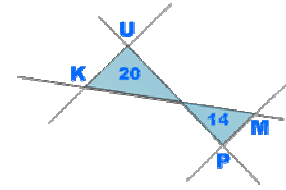
U koordinatnom sustavu prikazan je pravac. Koja od sljedećih tvrdnji je ispravna?

- A. Nagib pravca je konstantan i pozitivan.
- B. Nagib pravca je konstantan i negativan.
- C. Nagib pravca je konstantno pada i negativan je.
- D. Nagib pravca je konstantno pada i pozitivan je.

(Nerazlikovanje nagiba i visine grafa 33%)







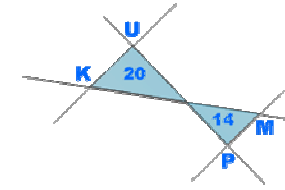
# NALAZI ISTRAŽIVANJA

Rezultati su obrađeni pomoću Raschovog modela koji omogućuje

- uvid u funkcioniranje zadataka kao mjernog instrumenta
- komparaciju područja ispitivanja

## VAŽNO ZA MATEMATIKU:

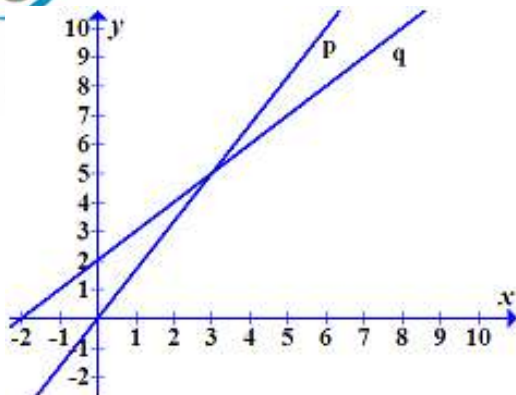
Suprotno uvriježenom mišljenju nastavnika fizike, utvrđeno je da znanje iz matematike nije glavna prepreka za rješavanje zadataka iz fizike!



# ISTRAŽIVANJA

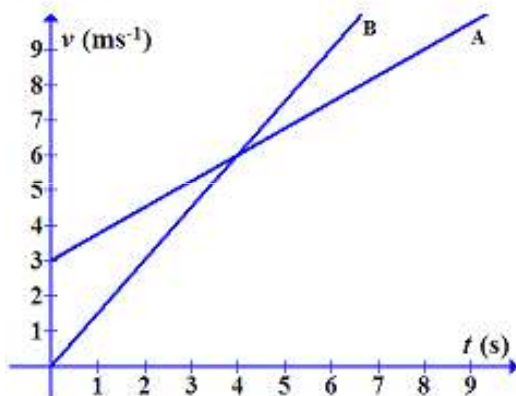
## DRUGO ISTRAŽIVANJE

- Provedeno na uzorku od 385 studenata matematike i fizike na početku prve godine
- Test od  $24 = 3 \times 8$  “paralelnih” zadataka višestrukog izbora
- Studenti su pisali objašnjenja za svoje odgovore
- Cilj je bio utvrditi je li veća težina zadataka iz fizike **posljedica nedostatka relevantnog znanja fizike** ili bi isti efekt bio uočen i u **nekom drugom kontekstu**, različitom od fizike, a koji ne zahtjeva neko specifično dodatno znanje (“stvarni život”, matematičko modeliranje)?



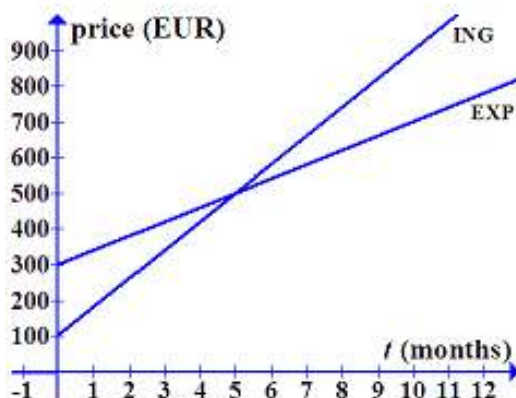
Na slici su prikazani pravci  $p$  i  $q$ . Usporedite njihove nagibe u  $x = 1$ .

- A. Nagib pravca  $p$  je manji od nagiba pravca  $q$ .
- B. Nagibi pravaca  $p$  i  $q$  su jednaki.
- C. Nagib pravca  $p$  je veći od nagiba pravca  $q$ .



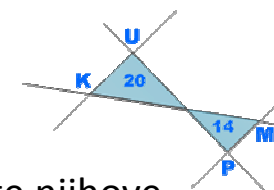
Na slici je prikazano gibanje dvaju tijela  $v$ - $t$  grafom. Usporedite njihove akceleracije u  $t = 2$ .

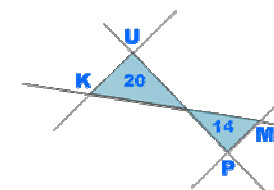
- A. Akceleracija tijela  $A$  je manji od akceleracije tijela  $B$ .
- B. Akceleracije tijela  $A$  i  $B$  su jednake.
- C. Akceleracija tijela  $A$  je veća od akceleracije tijela  $B$ .



Na slici je prikazana promjena cijena dionica ING i EXP u vremenu. Usporedite njihove brzine rasta u  $t = 3$  mjeseca.

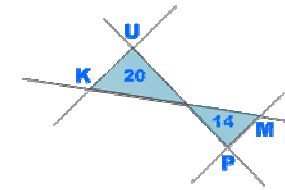
- A. Brzina rasta cijena dionica ING je manja od brzine rasta cijena dionica EXP.
- B. Brzina rasta cijena dionica ING i EXP su jednake.
- C. Brzina rasta cijena dionica ING je veća od brzine rasta cijena dionica EXP.





# NAGIB – NALAZI ISTRAŽIVANJA

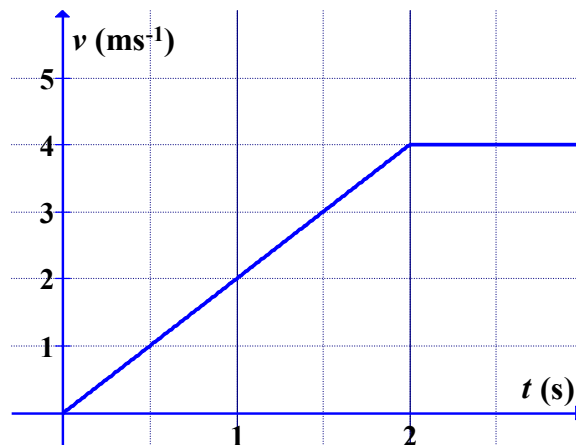
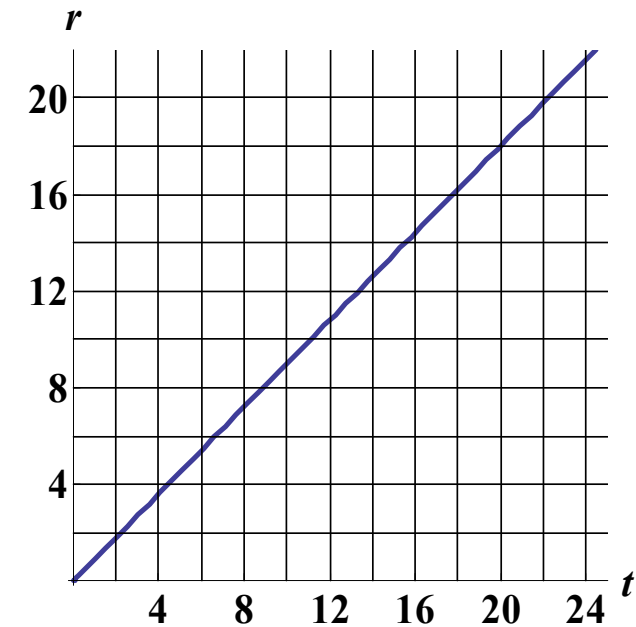
- Strategije koje studenti koriste ovise o kontekstu
- Preferirana strategija u fizici je korištenje formula
  - 21% u matematici
  - 44% u fizici
  - 8% u drugom kontekstu
- Nagib je nejasan pojam za mnoge studente (49% studenata)  
Rasuđivanje “uspon/hod” izraženo riječima:
  - 3% u matematici
  - 5% u fizici
  - 23% u drugom kontekstu(Neispravna) interpretacija nagiba kao kuta:
  - 18% u matematici
  - 3% u fizici
  - 7% u drugom kontekstu
- Studenti posebno imaju poteškoća sa značenjem negativnog nagiba



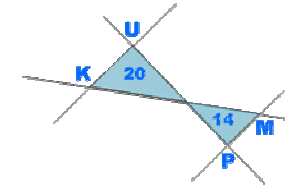
# UKUPNA PROMJENA

PRIMJER. Graf prikazuje **brzinu promjene** razine vode u rijeci tokom jednog dana. Kolika je ukupna promjena razine vode u prvih 20 sati?

$r$  = brzina promjene razine vode (cm/h)  
 $t$  = vrijeme (h)

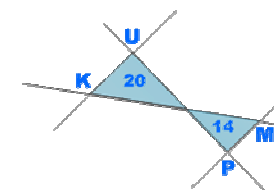


Dizalo se penje iz prizemlja na vrh zgrade. To je gibanje prikazano  $v$ - $t$  grafom na slici. Koju udaljenost prijeđe lift u prve dvije sekunde gibanja?

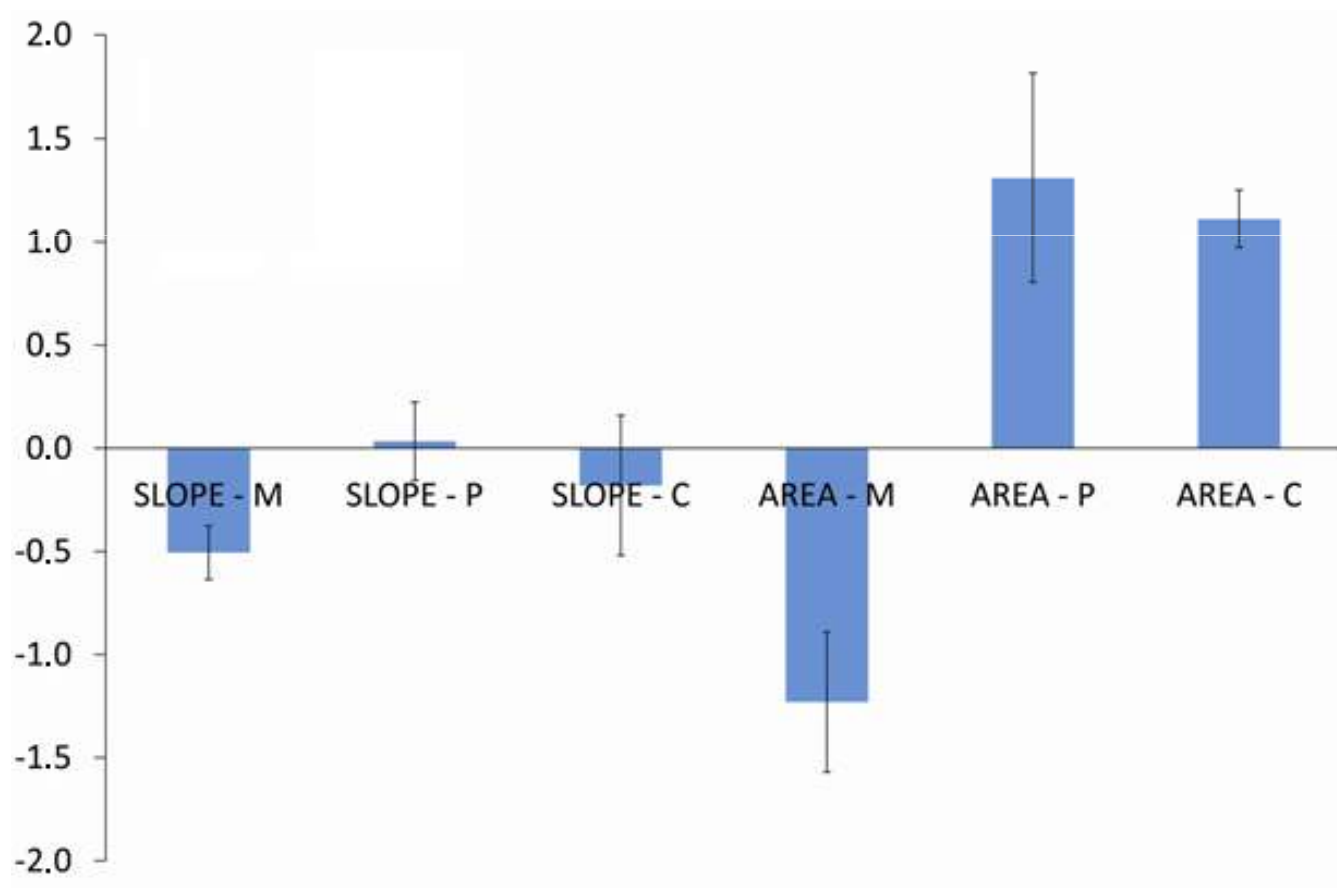


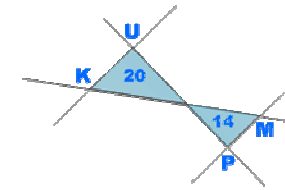
## UKUPNA PROMJENA – NALAZI ISTRAŽIVANJA

- Strategije koje studenti koriste ovise o kontekstu
  - Preferirana strategija u **fizici** je korištenje (fizikalnih) formula za računanje **površine**
  - Preferirana strategija u drugom kontekstu je **ideja akumucije**
  - Mnogi studenti koriste dimenzijsku analizu – tri puta češće u drugom kontekstu nego u fizici
- Transfer znanja?
  - = sposobnost “proširiti “ naučeno na druge kontekste
    - *koristiti* naučeno u drugim kontekstima
    - PFL = “preparation for future learning”

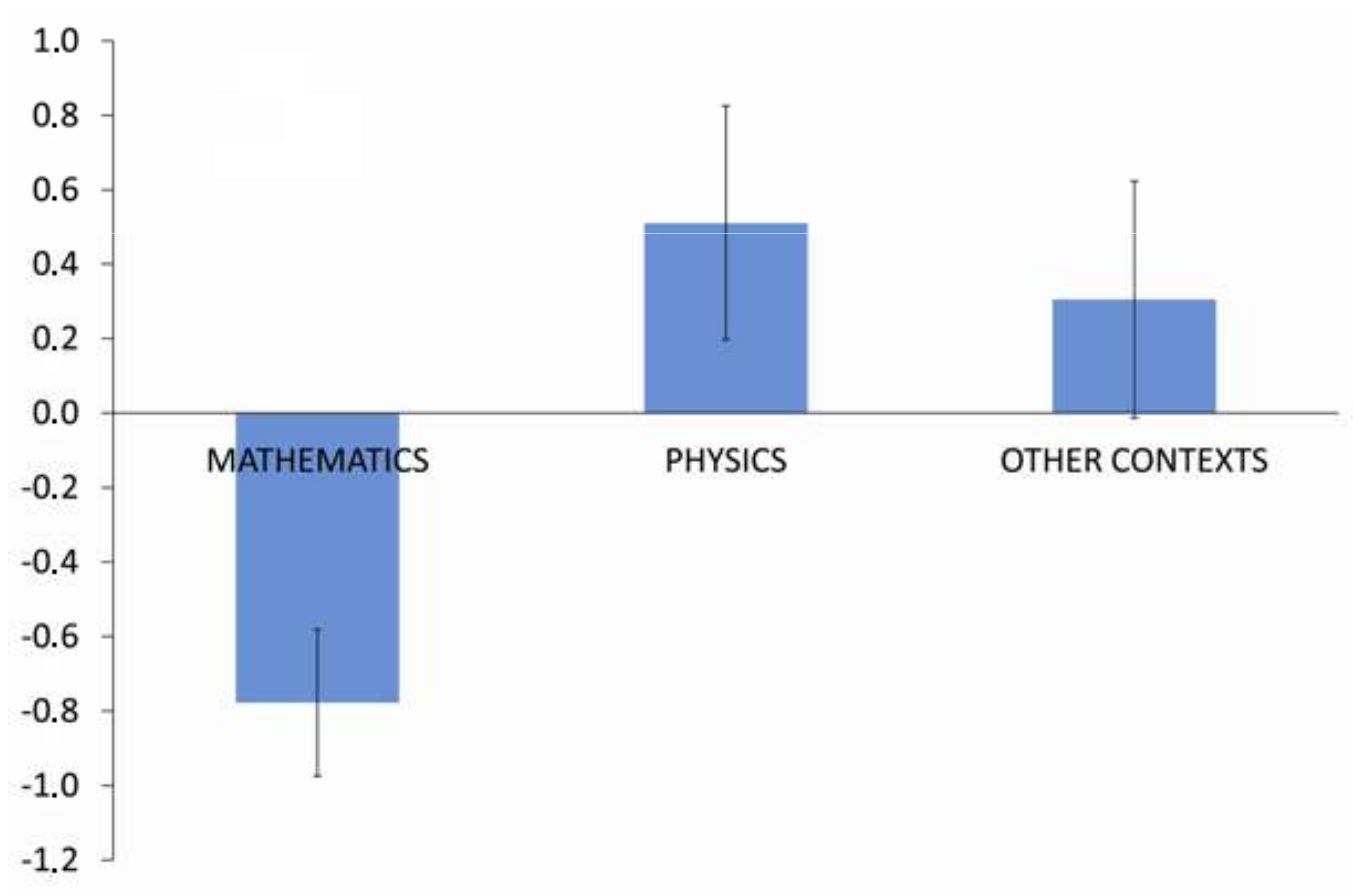


# RASCHOVA ANALIZA

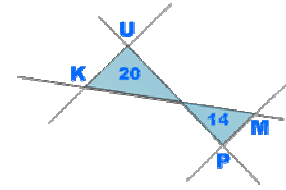




# RASCHOVA ANALIZA

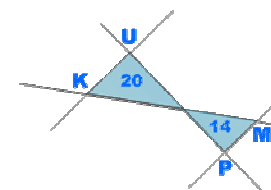






# ZAKLJUČCI

- Kontekst općenito povećava težinu zadatka
- Matematika nije glavna prepreka uspješnom rješavanju
- Različita područja aktiviraju različite strategije rješavanja
- Pojam nagiba se bolje razumije od ukupne promjene
- **Matematika može profitirati u interdisciplinarnom okruženju!**



**HVALA NA PAŽNJI!**