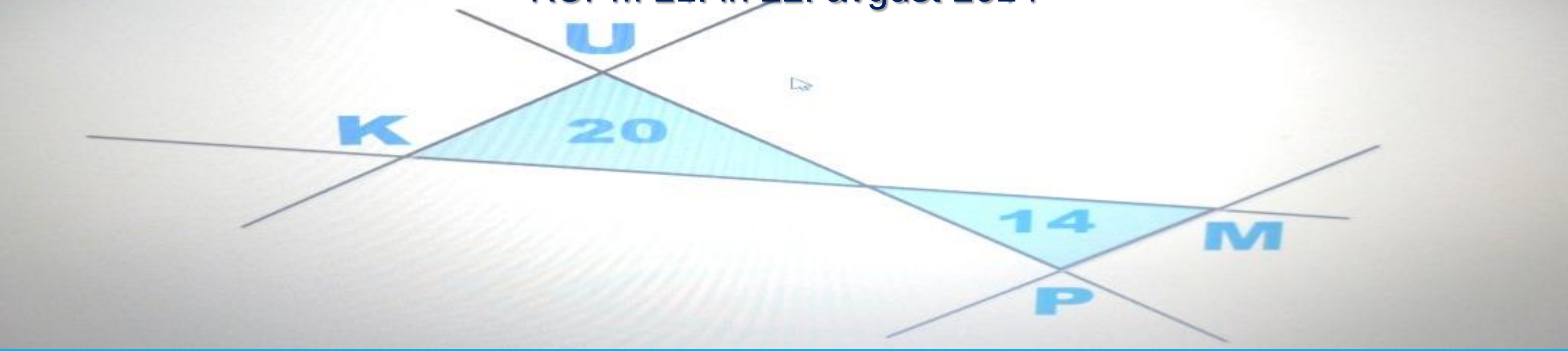
Učenje skozi reševanje in raziskovanje problemov

Pomen različnih predstavitev in strategij reševanja problemov za učenje z razumevanjem

Amalija Žakelj

KUPM 21. in 22. avgust 2014



Zavod Republike Slovenije za šolstvo
The National Education Institute Slovenia

Učenje skozi reševanje in raziskovanje problemov

(Schroeder &Lester, 1999).

https://www.google.si/

Skozi razvoj strategij reševanja problemov

poglabljamo razumevanje matematike

in

poznavanje in razumevanje matematike

omogoča razvoj strategij reševanja matematičnih problemov.

https://www.google.si/

Učenje skozi reševanje in raziskovanje problemov

Deset razlogov za učenje skozi reševanje in raziskovanje problemov (Goldin and Shteingold, 2001):

Reševanje (matematičnih) problemov:

- **povezuje veliko različnih matematičnih vsebin**
- **zahteva višje ravni razmišljanja**, višje kognitivne procese
- **prispeva h konceptualnemu razvoju in razumevanju**
- so za učitelja priložnost za **vpogled v znanje, razumevanje in tudi učne težave učencev**

- reševanje in raziskovanje problemov zahteva sprejemanje odločitev

- spodbuja **sodelovanje učencev in diskurz**, ki se opira na razumsko, **logično razčlenjevanje**

- se **povezuje z** drugimi pomembnimi (matematičnimi) idejami (ustvarjalnost)/vsebinami

- spodbuja **spretno uporabo** matematike

- ustvarja priložnosti za **razvoj veščin, ki so prenosljive v druge situacije**

Slika: Reševanje problemov (Lesh, 1983)

Lesh-eva Konceptualizacija procesa reševanja problemov

- Izhodišče: problem/problemska situacija

Prenos

Prenos

- model, slika, simbolni zapis

transformacija

- Rešitev

Procesi: ocenjevanje, razčlenjevanje, postavljanje vprašanj, sprejemanje odločitev, opazovanje/iskanje povezav med podatki/ iskanje vzorca, predvidevanje in posploševanje ...

- Izhodišče: problem/problemska situacija

Prenos

- **Predstavitev** problema:
- model, slika, simbolni zapis ...

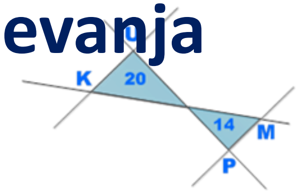
Prenos

Transformacija

- **Strategije reševanja:** empirično raziskovanje, deduktivno dokazovanje, induktivno sklepanje, ocenjevanje in postavljanje hipotez, sklepanje - logično razčlenjevanje, poskus napaka, empirično posploševanje, teoretično posploševanje ..

Konceptualizacija procesa reševanja problemov (prirejeno po Lesh-U, 1983)

Zakaj različne predstavitve in strategije reševanja problemov?

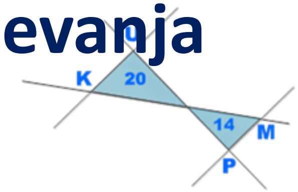


- **Širši uvid v problem,** vpogled v strukturo problema, **poglabljanje razumevanja** (dejstva, koncepte, spoznavamo z različnih perspektiv, več povezav ...)

Zakaj različne predstavitve in strategije reševanja problemov?

- **Širši uvid v problem,** vpogled v strukturo problema, **poglabljanje razumevanja** (dejstva, koncepte, spoznavamo z različnih perspektiv, več povezav ...)
- **Razvoj različnih oblik mišljenja** (induktivno sklepanje, deduktivno sklepanje, analogno mišljenje, transformacija, intuicija, kombinacija miselnih procesov ...)

Zakaj različne predstavitve in strategije reševanja problemov?



- **Širši uvid v problem,** vpogled v strukturo problema, **poglabljanje razumevanja** (dejstva, koncepte, spoznavamo z različnih perspektiv, več povezav ...)
- **Razvoj različnih oblik mišljenja** (induktivno sklepanje, deduktivno sklepanje, analogno mišljenje, transformacija, intuicija, kombinacija miselnih procesov ...)
- **Prilagajanje posamezniku** (glede na obseg in raven znanja izbira strategij reševanja problema: npr. reševanje ob grafični podpori ali samo z enačbo, empirično ali algebraično reševanje, logično razčlenjevanje - postavljanje hipotez ...)

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Zakaj različne predstavitve in strategije reševanja problemov?

- **Širši uvid v problem,** vpogled v strukturo problema, **poglabljanje razumevanja** (dejstva, koncepte, spoznavamo z različnih perspektiv, več povezav ...)
- **Razvoj različnih oblik mišljenja** (induktivno sklepanje, deduktivno sklepanje, analogno mišljenje, transformacija, intuicija, kombinacija miselnih procesov ...)
- **Prilagajanje posamezniku** (glede na obseg in raven znanja izbira strategij reševanja problema: npr. reševanje ob grafični podpori ali samo z enačbo, empirično ali algebraično reševanje, logično razčlenjevanje - postavljanje hipotez ...)
- **Razvoj ustvarjalnosti** - samostojno iskanje poti, povezovanje, uporaba znanja, **razumevanje in poglabljanje matematike** idr.
- Razvoj čim širšega **nabora strategij reševanja** problemov

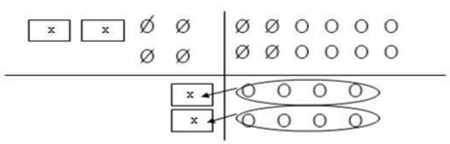
Iz vsebine v nadaljevanju

problem	**Predstavitev/strategija reševanja**		
Vsota prvih n naravnih števil	Uporaba modela (stopnice)	Algebraično reševanje	Raziskovanje
Besedilni problem 1	Grafična predstavitev (dopolnjevanje slike)	Simbolni zapis – po korakih	enačba
Besedilni problem 2)	Empirični pristop	Postopno dopolnjevanje slike	Sistem enačb
Domine	Logično razčlenjevanje, postavljanje vprašanj	Skozi reševanje problema poglabljati tudi razumevanje	
Petkotnik	Deduktivno dokazovanje	Od splošnih spoznanj k posameznim primerom s pomočjo zakonov, načel, formul ...	
Kvadrat	Induktivno sklepanje, posploševanje	Od posameznega k splošnemu, od konkretnih primerov k posplošitvam, uporaba posplošitev pri posameznih primerih	

Izziv: Izbrati primerno predstavitev/strategijo reševanja problema glede na starost, predznanje, obseg in nivo matematičnega znanja

Primer: Karla lahko v trgovini kupi za 12 €. Nujno mora kupiti 2 kg češenj, ki stanejo 2 €*/kg*. Za preostali denar lahko kupi lešnike. Ena vrečka lešnikov stane 2 €. Koliko vrečk lešnikov lahko kupi?

Predstavitev problema	strategija reševanja
a) Slikovna	analize slike



b) Enačba	Reševanje enačbe
$2x + 4 = 12$	
c) Verbalna	Ustno reševanje – razlaga.

Izziv: Izbrati primerno predstavitev/strategijo reševanja problema glede na starost, predznanje, obseg in nivo matematičnega znanja

Pokaži, da je vsota dveh sodih števil sodo število in vsota dveh lihih števil sodo število.

Predstavitev problema (z uporabo spremenljivke)

Soda cela števila: 2, 4, 6 .. posplošitev ... $2 \cdot n,\ n \in Z$

Liha *cela* števila: 1,3,5,7 .. posplošitev ... $2 \cdot n + 1,\ n \in Z$

Strategija reševanja

Dokaz:

$2 \cdot n + 2 \cdot m = 2(n + m)$

$2 \cdot n + 1 + 2 \cdot m + 1 = 2 \cdot n + 2 \cdot m + 2 = 2(n + m + 1)$

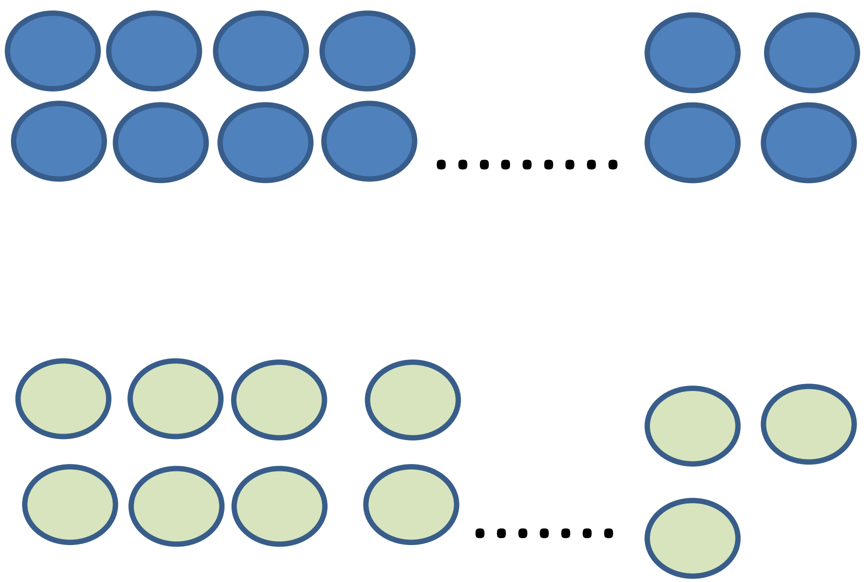
$(n, m \in Z)$

Kaj pa na nivoju razrednega pouka?

Strategije reševanja odražajo tudi nivo in obseg matematičnega znanja.
Slikovna/grafična predstavitev problema
Namen: Vizualizacija

Pokaži, da je vsota dveh sodih števil sodo število in vsota dveh lihih števil sodo število.

Predstavitev problema(slikovno)

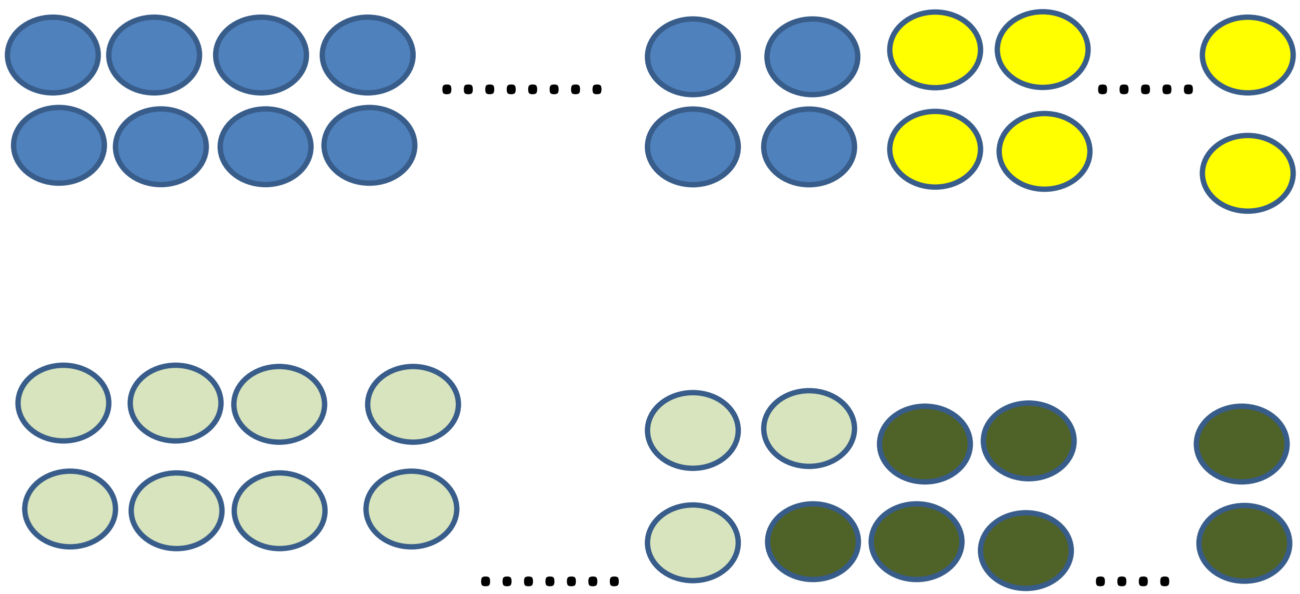


Slika: Grafična predstavitev sodih in lihih naravnih števil

(VIR: Primary Mathematics, Patrick Barmby, Lynn Bilsborough, Tony Harries and Steve Higgins, 2009)

Rešitev problema na razredni stopnji. Slikovna/grafična predstavitev problema Namen: Vizualizacija

Strategija reševanja



Slika: „Vizualni dokaz„: *Vsota dveh sodih naravnih števil je sodo število in vsota dveh lihih števil je sodo število.“*

(VIR: Primary Mathematics, Patrick Barmby, Lynn Bilsborough, Tony Harries and Steve Higgins, 2009)

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Različne predstavitve in strategije reševanja problema omogočajo uvid v situacijo z različnih perspektiv

Primer: vsota prvih n naravnih števil

uporaba modela

algebraična metoda

raziskovanje trikotniških števil

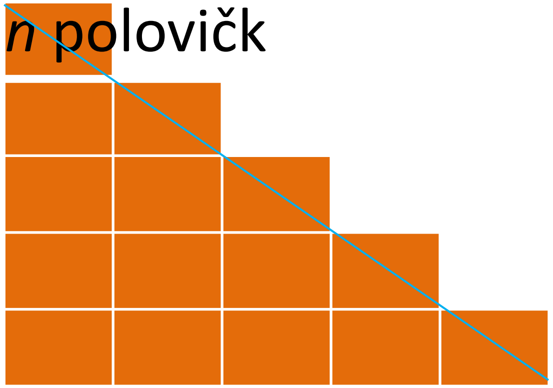
Razišči vsoto prvih n naravnih števil: 1+2+3+4+ ...+n)

a) Uporaba modela - geometrijski način (*prirejeno po Malešič, 1985*)

Razmislek: Kako se gradi vsota: 1,   1+2,   1 +2+3,   1+2+3+4, ... „stopnice”

Iz kvadratov s stranico 1 cm sestavimo stopnišče iz *n* stopnic.

V prvi stopnici je en kvadrat, v drugi sta dva, v tretji so trije ... v n-ti pa *n* kvadratkov s stranico 1 cm. Zato je vsota kvadratkov (s stranico 1 cm) 1+2+3+ ... + *n enaka* ploščini stopničastega lika (v cm^2).



Lik je sestavljen iz:
polovice kvadrata s stranico *n* cm: $\frac{1}{2} n^2$ cm^2 in iz *n* polovičk kvadratkov: n(½) cm^2

$Pl = \frac{1}{2} n^2 + n\,(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)\ cm^2$

Torej:

$1+2+3+4+ ...+n= n^2 + n\,(\frac{1}{2})= \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

b) Algebraična metoda (če je n sodo število)

Vsota od 1 do *n*, če je *n* sodo število:

$1+2+3+ .. + \frac{1}{2} n + (\frac{1}{2} n+1) + ...+ n =$

$(1+n) + (2+n-1) + .. + (\frac{1}{2} n + \frac{1}{2} n+1)=$

$(n+1) + (n+1) + ...(n+1)=$

$= \frac{1}{2}n(n+1)$

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

b) Algebraična metoda (če je n liho število)

Seštejemo vsa števila od 1 do *n-1,* kjer je *n-1* sodo število:

$1+2+3+ \,..\, + \frac{1}{2}\,(n-1) + (\frac{1}{2}\,(n-1)+l) + \,...+ (n-1) =$

$(l+n-1) + (2+n-2) + \,..\, + (\frac{1}{2}\,(n-1) + \frac{1}{2}\,(n-1)+1)=$

$(n) + (n) + \,............(n)=$

$= \frac{1}{2}\,(n-1)n$

<u>Prištejemo n:</u> $\frac{1}{2}\,(n-1)n +n = n(\frac{1}{2}\,(n-1) +1)=$

$= n(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2})= \frac{1}{2}\, n\, (n+1)$

c) Z raziskovanjem trikotniških števil do vsote prvih n naravnih števil

Trikotniška števila: 1 + 2 + 3 + ... *n*

- Prvo število v zaporedju je 1
- *Za n* = 2 je število v zaporedju: 1 + 2 = 3
- *Za n* = 3 je število v zaporedju: 1 + 2 + 3 = 6
- ....

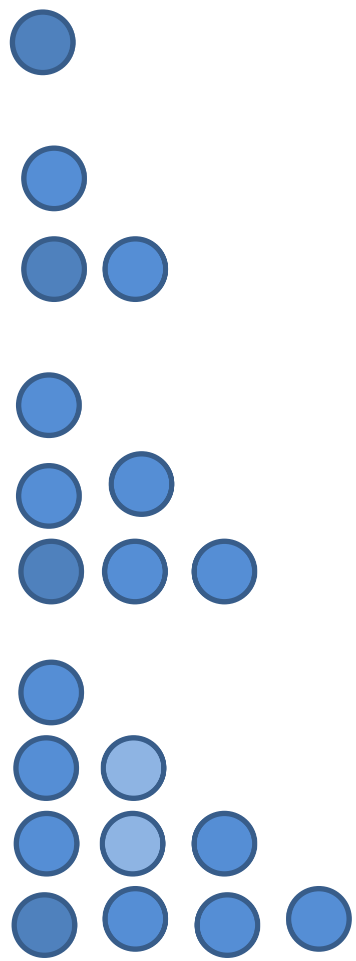
Raziskovanje trikotniških števil

1

1+2

1+2+3

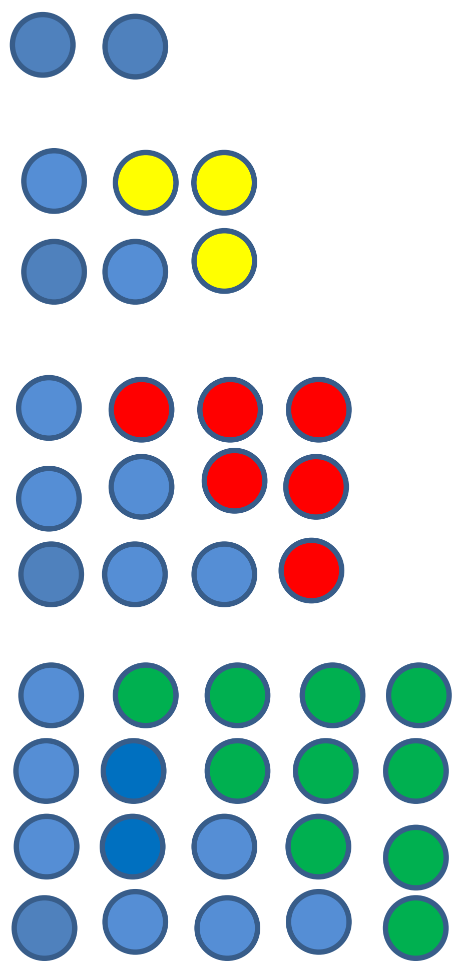
1+2+3+4



Slika: Grafična predstavitev trikotniških števil

Oblikujmo podvojena trikotniška števila

- 2x1
- 2x3
- 2x6
- 2x10



Slika: Grafična predstavitev podvojenih trikotniških števil

Podvojena trikotniška števila

za $n = 1$, je podvojeno *trikotniško* število $1 \cdot 2$

za $n = 2$, je podvojeno *trikotniško* število $2 \cdot 3$

za $n = 3$, je podvojeno *trikotniško* število $3 \cdot 4$

Splošno: Podvojeno trikotniško število: $n \cdot (n + 1)$.

Sklepamo:

Če je ***podvojeno n-to trikotniško*** število $n \cdot (n + 1)$, je ***n-to trikotniško število***

$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$.

Sklepamo:

Ker je ***n-to trikotniško*** enako vsoti prvih n naravnih števil, ugotovimo pravilo za vsoto prvih n- naravnih števil.

$$\mathbf{1 + 2 + 3 . . . + \boldsymbol{n} = \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{n}\, (\boldsymbol{n} + 1)}$$

Namen:

Vzporedno ob učenju strategij reševanja problema (uporaba modela, raziskovanje trikotniških števil ...) smo poglobili/usvojili/spoznali matematična dejstva (npr. vsoto prvih n naravnih števil).

in obratno

Ob poznavanju matematičnih konceptov (ploščina, kvadrat, sodo, liho število, splošni člen zaporedja, algebrski izrazi ..) smo razvili strategije reševanja in rešili problem (geometrijski način, algebrajski način, raziskovanje trikotniških števil).

Povezati algebro in geometrijo

Spretno urejanje algebrskih izrazov - ustvarjalnost.

Opazovanje slike in iskanje novih povezav, zakonitosti.

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

U K 20 14 M P

Različne predstavitve in strategije reševanja problema
omogočajo uvid v situacijo z različnih perspektiv

BESEDILNI PROBLEM

grafična podpora

postopno dopolnjevanje slike

simbolni zapis

reševanje po korakih

algebraična metoda

reševanje enačbE

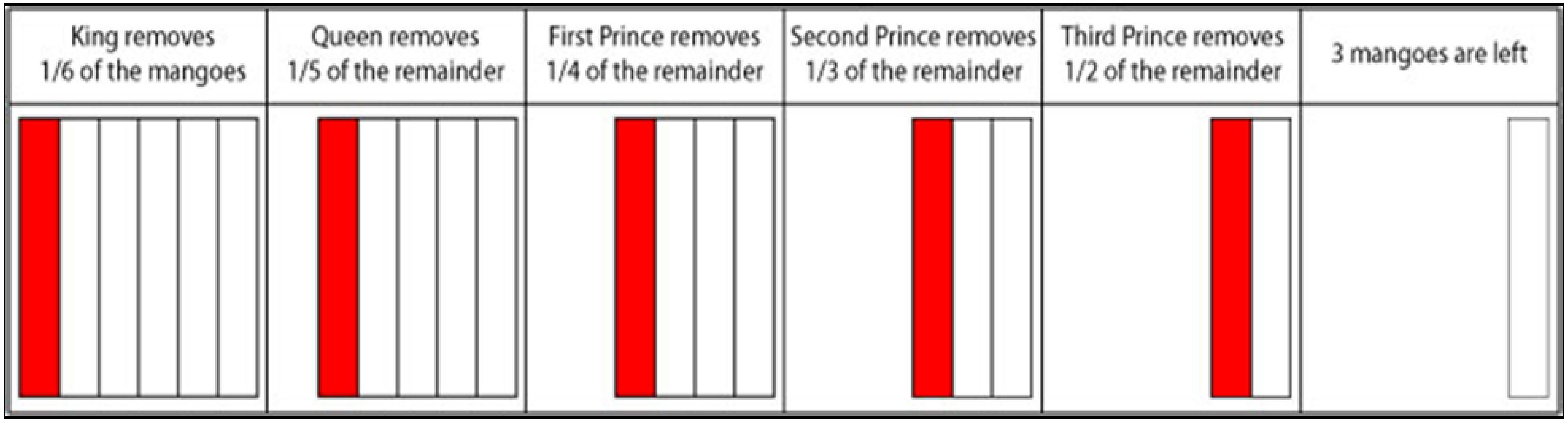
Primer: Kdo je pojedel hruške? (prirejeno po Stonewater, Jerry 1994)

Neke noči kralj ni mogel spati, zato je šel v kuhinjo, kjer je našel posodo polno hrušk. Pojedel jih je 1/6. Kasneje je prišla kraljica in pojedla 1/5 preostalih hrušk. Za njo je prišel prvi princ in pojedel 1/4 hrušk, ki jih je pustila kraljica. Za prvim princem je prišel drugi princ in pojedel 1/3 ostanka. Tretji prince je pojedel 1/2 hrušk, ki jih je pustil drugi princ. Zjutraj so v posodi ostale še tri hruške.

Koliko hrušk je bilo prvotno v posodi?

a) Predstavitev problema: Slikovna/grafična predstavitev problema
Namen: Vizualizacija Namen: Vizualizacija

Stonewater, Jerry (1994).



Začnemo z izdelavo pravokotnika, ki predstavlja vse hruške v posodi. Ker jih je kralj pojedel 1/6, pravokotnik razdelimo na 6 enakih delov. Ta pravokotnik izločimo (pobarvamo z rdečo). Ostane še 5/6 sadežev.

…………………

Na koncu ostanejo 3 hruške in en pravokotnik, ki predstavlja 1/6 vseh sadežev.

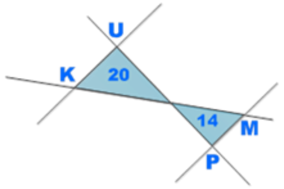
Rešitev: 6 x 3 = 18.

Uvid v problem: nazorna predstavitev med deli celote

b) Strategija reševanja: S simbolnim zapisom, podatke zapisujemo sistematično

poraba	ostanek
x/6	x - x/6= 5x/6
1/5 od 5x/6 = x/6	5x/6 – x/6= 4x/6
1/4 od 4x/6 = x/6	4x/6 - x/6= 3x/6
1/3 od 3x/6 = x/6	3x/6 – x/6= 2x/6
½ od 2x/6 = x/6	2x/6 - x/6 = x/6 (3 mangi)
rešitev	3 x 6 = 18

Uvid v problem: s sistematičnim zapisovanjem do rešitve



c) Strategija reševanja: s simbolnim zapisom (z enačbo)

$1/6\,(x) + 1/5(5x/6) + 1/4(4/6x) + 1/3(3x/6) + 1/2(2x/6) + 3 = x$

- Rešitev: X= 18

Uvid v problem: celovita predstavitev

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

RAZLIČNE PREDSTAVITVE IN STRATEGIJE

reševanja problema omogočajo uvid v situacijo z različnih perspektiv

BESEDILNI PROBLEM

starostni problem

dopolnjevanje slike

analiza podatkov

empirični pristop

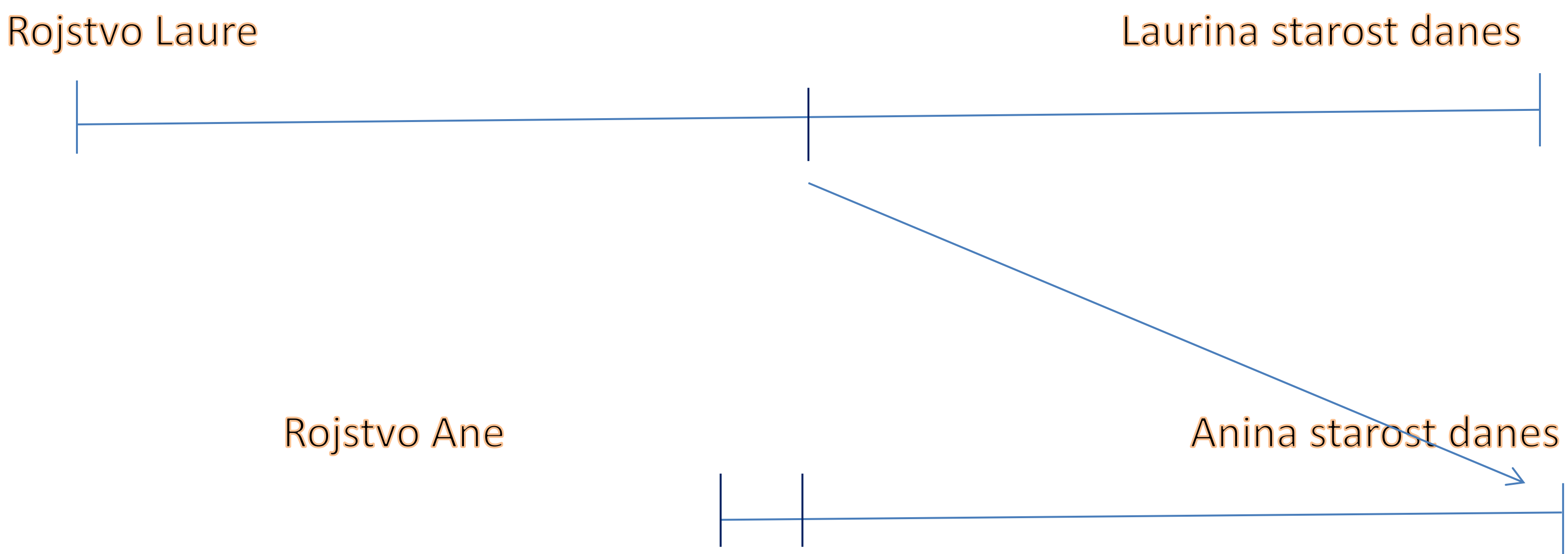
algebraični pristop – reševanje sistema enačb

Primer: starostni problem

Laura je danes stara trikrat toliko kot je bila Ana, ko je bila Laura stara toliko kot je Ana danes. Čez dve leti bo Laura stara dvakrat toliko kot je bila Ana stara pred dvema letoma. Koliko sta stari danes?

- Formulacija problema je zahtevna.
- Predstavitev odnosov med podatki je podana v dveh zankah.
- V nalogi ni konkretnega podatka.
- Prvi korak: V pomoč je lahko grafična predstavitev problema.

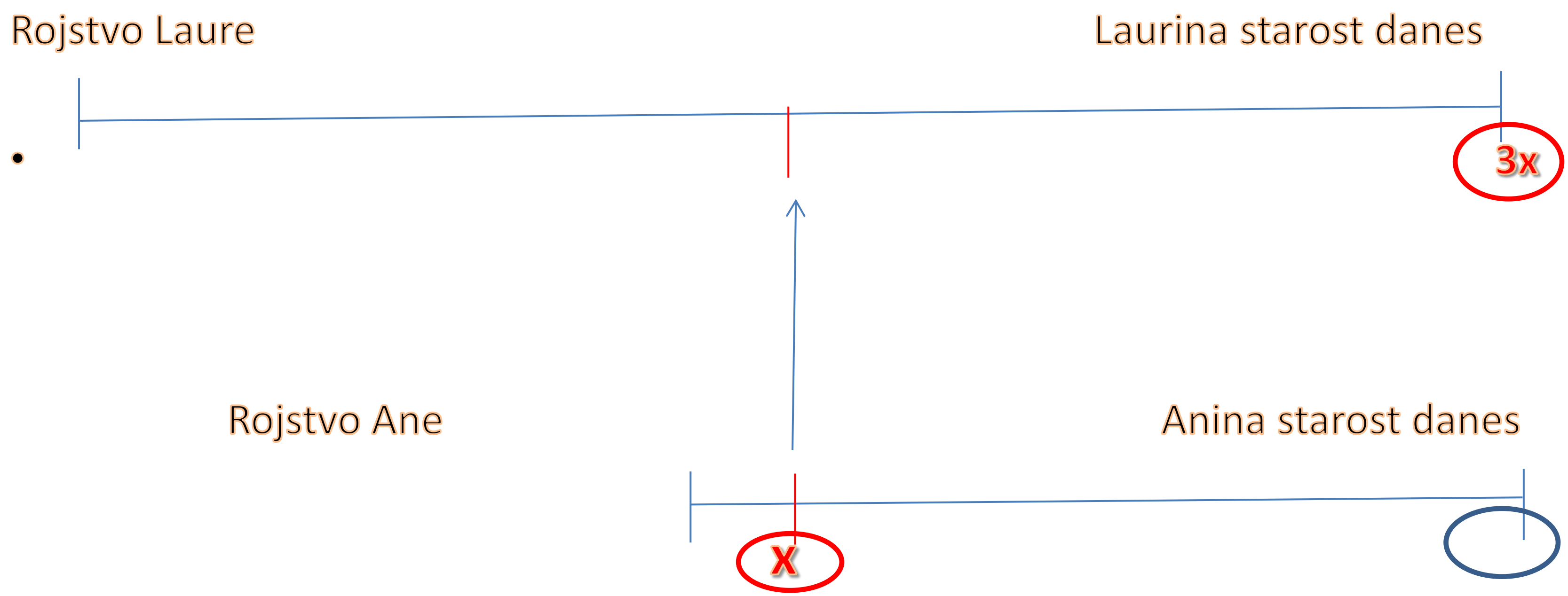
a) Predstavitev problema: Slikovna/grafična predstavitev problema



Slika: Predstavitev problema

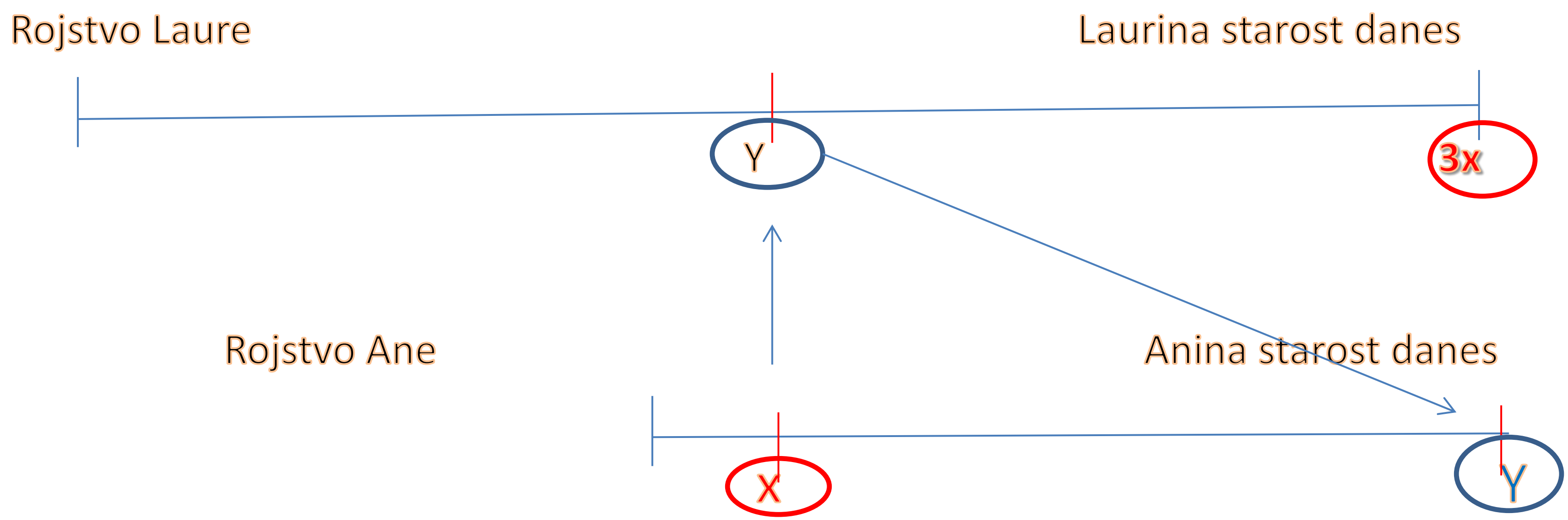
Npr. ».. ko je bila Laura stara toliko kot je Ana danes ... Laura je starejša«

Predstavitev problema: Postopno dopolnjevanje slike



Slika: *Laura je danes trikrat toliko stara kot je bila Ana ..*

Predstavitev problema: Postopno dopolnjevanje slike



Slika: Dodamo starost Ane danes

... ko je bila Laura stara toliko kot je Ana danes

Podatki v tabeli/na sliki učencu olajšajo zapis odnosa med podatki: **3x – y = y – x**

Preuredimo

$3x = 3y/2$ Pomeni, da je Laurina starost danes 3/2 krat Anine starosti danes

a) Strategija reševanja?

Upoštevamo ugotovitev oz. podatke v nalogi:

- Laurina starost je 3/2 Anine starosti ($3x = 3y/2$) ter
- Čez dve leti bo Laura dvakrat toliko stara kot je bila Ana pred dvema letoma. $3x + 2 = 2(y - 2)$

Strategija reševanja? – odvisna od predznanja.

a) Strategija reševanja: Empirično reševanje

Podatke sistematično prikažemo v tabeli in analiziramo odnose med podatki.

Laurina starost je 3/2 Anine starosti

Čez dve leti bo Laura dvakrat toliko stara kot je bila Ana pred dvema letoma

Anina starost danes	Laurina starost danes (3/2 x Anina starost)	Anina starost pred dvema letoma	Dvakrat Anina starost pred dvema letoma	Laurina starost čez dve leti
1	1 ½	- 1	-2	3 ½
2	3	0	0	5
3	4 ½	1	2	6 ½
4	6	2	4	8
5	7 ½	3	6	9 ½
6	9	4	8	11
7	10 ½	5	10	12 ½
8	12	6	12	14
9	13 ½	7	14	15 ½
10	15	8	16	17
11	16 ½	9	18	18 ½
12	**18**	**10**	**20**	**20**
13	19 ½	1	22	21 ½
14	21	12	24	23
15	22 ½	13	26	24 ½

Ana je danes stara 12 let, Laura je danes stara 18 let.

b) Strategija reševanja: sistem enačb (algebraično reševanje)

	leto rojstva		starost določenega leta v preteklosti	danes	čez dve leti
Laura	rojstvo Laure		y	3x	3x +2
Ana		rojstvo Ane	x	y	y + 2

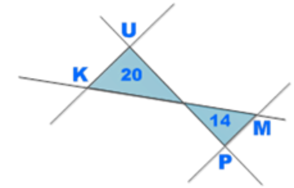
Sistem enačb:

$$3x - y = y - x$$
$$3x + 2 = 2(y - 2)$$

Rešitev problema s pomočjo sistema

$$X = 6 \qquad y = 12$$

Ana je danes stara 12 let, Laura je danes stara 18 let.



Analiza poteka in refleksija

Predstavitev problema:

- slikovna/grafična predstavitev problema
- tabela (ureditev podatkov)
- sistem enačb

Strategija reševanja:

- Postopno dopolnjevanje slike
- analiza podatkov **(empirični pristop)**
- algebraični pristop – reševanje sistema enačb

Procesi: razčlenjevanje, analiza odnosov med podatki

Povezovanje matematičnih vsebin: linearna enačba, sistem linearnih enačb

Procesi reševanja problema kot procesi učenja za razumevanje

DOMINE

Procesi: Razčlenjevanje, **postavljanje vprašanj** in domnev, sprejemanje odločitev, **ocenjevanje**

Povezovanje matematičnih vsebin:

aritmetična sredina, pojmi iz kombinatorike

Skozi razvoj strategij reševanja problema, do **poglabljanja razumevanja** matematičnih pojmov (aritmetična sredina, pojmi iz kombinatorike)

Refleksija

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Primer: Domine:

V 5 sekundah si oglejte sliko. Izračunate/ocenite skupno število pik na vseh dominah na sliki.

Za domine na sliki velja:

Vse domine so ena poleg druge – se ne prekrivajo.

Največje število pik na eni domini je 18 (9+9).

Velikosti ene domine je 0. 8cm × 1. 7cm,

Velikost plošče z dominami je 6.4cm × 8.5cm

Rešite problem, ne da bi gledali na originalno sliko.

Slika: *(Vir: Patrick Barmby, Lynn Bilsborough,Tony Harries and Steve Higgins (2009). PrimaryMathematics Teaching for Understanding, world wide web: www.openup.co.uk and Two Penn Plaza, New York, NY 10121–2289, USA)*

Strategija reševanja: ocenjevanje in postavljanje hipotez, sklepanje - logično razčlenjevanje

Raziskovalna (pod)vprašanja:

1. Koliko je domin?

- Ploščina ene domine: $0.8\text{cm} \times 1.7\text{cm} = 1.36\text{cm}^2$.
- Ploščina plošče z dominami $6.4\text{cm} \times 8.5\text{cm} = 54.4\text{cm}^2$.

Ocena števila domin na plošči: $54.4 \div 1.36 = 40$

Procesi: postavljanje vprašanj, sprejemanje odločitev

Ugotovitev: Na sliki je **približno** 40 domin.

2. Koliko pik je na 40 dominah?

3. Koliko je povprečno število pik na eni domini?

4. Koliko je vseh domin v kompletu?

4. Koliko je vseh domin v kompletu?

Katera matematika se skriva za problemom?

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Ugotovitev: v kompletu je 100 domin (10x10)

45 domin se podvoji, 10 domin ima na obeh polovicah enako število pik (45 + 45 +10)
55 različnih domin

Tabela: možne kombinacije števila pik na dominah v kompletu

5. Koliko je pik na 100 dominah? 6. Koliko je povprečno število pik na eni domini?

Tabela. Vsota pik v kompletu dvojnih domin

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	45
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	55
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	65
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	75
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	85
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	95
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	105
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	115
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	125
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	135
											900

Ugotovitev: V kompletu je skupno 900 pik.

Povprečno število pik na eni domini:
900 pik ÷ 100 dominami = 9 pik/domino.

Rešitev prvotnega problema: na 40 dominah je 9 x 40 = 360 pik. Na sliki je približno 360 pik.

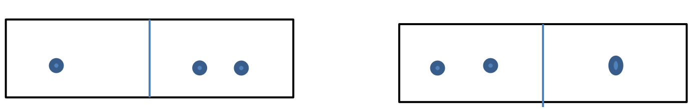
Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Refleksija procesa reševanja:

Za refleksijo je pomembno, da pri iskanju rešitev in utemeljevanju korektnosti postopka učenec obrazloži postopek, ki ga je uporabil ter poišče še druge povezave, morda na drugih področjih matematike.

Dileme:

- Nismo upoštevali praznega prostora med dominami.
- Domine smo šteli dvojno. V primeru, da domine niso dvojne, ali bi dobili enak rezultat?

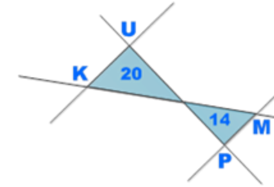


(1,2)   (2,1)

Ponovna analiza

Tabela: Vsota pik na dominah v kompletu »enojnih« domin

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	vsota
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	45
1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	54
2			4	5	6	7	8	9	10	11	60
3				6	7	8	9	10	11	12	63
4					8	9	10	11	12	13	63
5						10	11	12	13	14	60
6							12	13	14	15	54
7								14	15	16	45
8									16	17	33
9										18	18
											495



Povprečno število pik na eni domini: 495 pik ÷ 55 dominami = 9 pik/domino

Na 40 dominah je 9 x 40 = 360 pik.

Dobili smo enak rezultat. Torej ocena števila pik ni odvisna od vrste kompleta.

Priložnost, da to povežemo s konceptom aritmetične sredine in s pojmi iz kombinatorike.

Utemeljitev:

Aritmetična sredina *n* podatkov: x

Aritmetična sredina m podatkov: x

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Če je aritmetična sredina n podatkov, katerih vsota je s, enaka aritmetični sredini m podatkov, katerih vsota je *k* ($s/n = k/m = x$),

potem je tudi povprečna vrednost n+m podatkov, katerih vsota je *s+k*, enaka *x.*

Velja namreč: $(s+k)/(n+m) = (xn + xm)/(n+m)= x(n+m)/(n+m) = x$

(Vsota podatkov je enaka produktu med povprečno vrednostjo in številom podatkov.)

Skozi reševanje problema poglabljati tudi razumevanje

Vzporedno ob učenju strategij reševanja problema smo poglobili tudi razumevanje aritmetične sredine, pojme iz kombinatorike

in obratno

Ob poznavanju matematičnih konceptov (ploščina, aritmetična sredina, kombinatorne situacije ...) smo razvili strategije reševanja (ocenjevanje, postavljanje vprašanj, sklepanje ...).

Refleksija: Premislimo, če je pristop, ki smo ga izbrali, primeren.

Razmislek o poteh reševanja problema je pomemben del razvoja razumevanja.

Procesi reševanja problema kot procesi učenja za razumevanje

ŠTEVILSKI KVADRAT

PETKOTNIK

Induktivno sklepanje

Deduktivno sklepanje

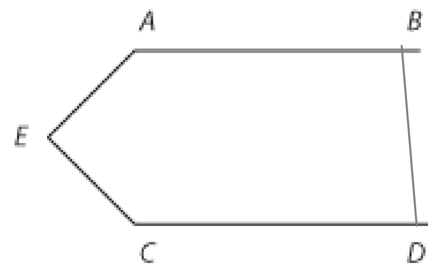
Stopnjevanje problema

Samostojno raziskovanje

Od dokazovanja do raziskovanja

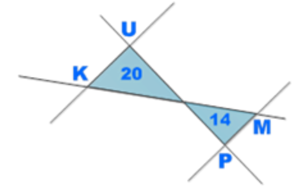
Primer 1: Vsota kotov: (prirejeno po Cai & Nie, 2007)

Primer 1 a: Na sliki je stranica AB petkotnika ECDBA vzporedna stranici CD. Notranji kot petkotnika ECDBA v oglišču A je α , notranji kot v oglišču C je β, in notranji kot v oglišču E je t δ.



a) Pokaži, da je vsota notranjih kotov petkotnika ECDBA v oglišču A, E in C enaka 360 °.

Namen



Cilji naloge:

- Dokazovanje: z uporabo matematičnih dejstev (poznati lastnosti kotov, poznati izmenične kote, prepoznati pare skladnih kotov ...) dokazati dano trditev.

- Izbrati primerno strategijo reševanja problema*:*

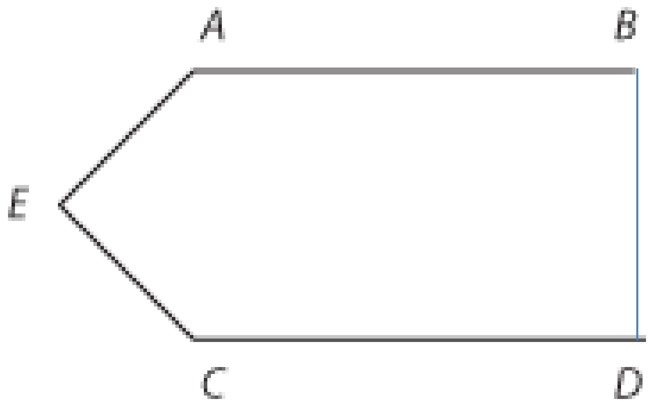
  analiza slike, raziskovanje odnosov med geometrijskimi elementi na sliki, dopolnjevanje slike ter iskanje možnih povezav, uporabiti znanje o skladnih kotih, o izmeničnih kotih, prepoznati skladne kote, izmenične kote, polni kot

  Ob reševanju naloge učenci preverjajo npr. razumevanje pojma skladnost kotov - ob konkretni situaciji prepoznavajo pare skladnih kotov*)*

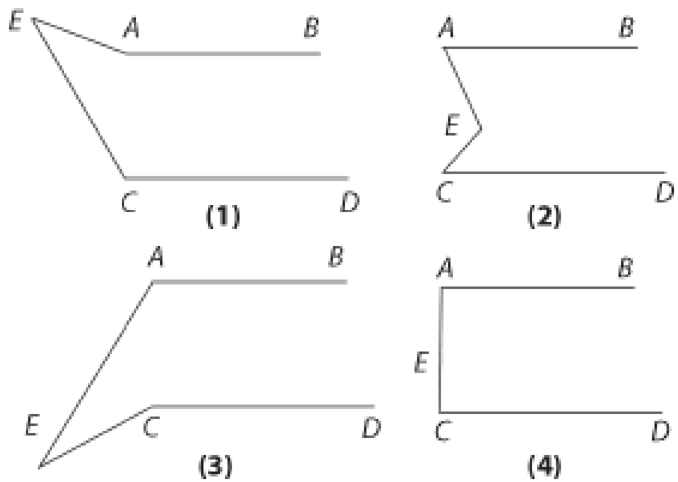
Tip naloge: Dokazovanje danih matematičnih trditev

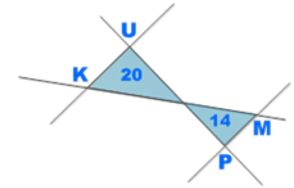
Stopnjevanje problema v smeri samostojnega raziskovanja:

b) **Koliko je vsota** notranjih kotov petkotnika ECDBA v oglišču A, E in C?



c) Koliko je vsota α + β + δ, če leži točka E v položajih, kot je prikazano na spodnji sliki.





Cilji:

- Vpogled v strukturo problema
- Raziskati problemsko situacijo, samostojno postaviti vprašanje/trditev ter jo dokazati
- Razvijati strategije reševanja
- Poiskati odnose med geometrijskimi elementi na sliki
- Prepoznati pare skladnih kotov
- Povezati izreke o skladnih kotih
- O izmeničnih kotih

Tip naloge: Samostojno raziskovanje

S stopnjevanjem problema, problem nadgradimo in dodamo dimenzijo, ki zahteva reševanje problemov na višji ravni razmišljanja, vključuje višje kognitivne procese.

Nadgradnja problema prispeva h konceptualnemu razvoju in razumevanju, saj zahteva samostojno raziskovanje.

Induktivno sklepanje - od posameznega k splošnemu
Posploševanje

Primer: Številski kvadrat - raziskovanje vzorcev

V številskem kvadratu 10 x 10 izberi poljuben kvadrat (npr. 3x3).

Opazuj števila v nasprotnih ogliščih kvadrata.

Razišči zakonitost/pravilo/vzorec, ki se pojavlja med njimi?

Podobno raziskuj števila v kvadratih različnih velikosti (npr. 3 × 3 kvadrati, 4 × 4, 5 x 5 .. kvadratov).

Zapiši ugotovitev.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	71	72	73	74	75	76	77	78	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	02	93	94	95	96	97	98	99	100

Primer reševanja:

Izberimo kvadrat 4x4.

Če število v zgornjem levem oglišču kvadrata označimo z s, je število v nasprotnem oglišču (po diagonali) enako: t = s + 30 + 3

Vsota števil v ogliščih je: **<u>s+t= s + s + 30 + 3 = 2s + 33</u>**

Če število v desnem zgornjem oglišču kvadrata označimo z l (l = s+3), je število v nasprotnem oglišču: k = s+ 30

Vsota števil v ogliščih je: **<u>l + k = s+3 + s+30= 2s +33</u>**

<u>Ugotovimo: s+t = l+k</u>

Ugotovimo, da sta vsoti števil v nasprotnih ogliščih kvadrata 4x4 po levi in desni diagonali enaki.

Posploševanje:

Sledi vprašanje. Ali to velja v vsakem kvadratu m x m, ki ga izberemo v številskem kvadratu 10x10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	s	25	26	l	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	k	55	56	t	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	71	72	73	74	75	76	77	78	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	02	93	94	95	96	97	98	99	10 0

Izberimo kvadrat m x m.

Če število v zgornjem levem oglišču kvadrata označimo z s, je število v nasprotnem oglišču (po diagonali) enako: t = s +(m-1)·10 + m -1

Vsota števil v ogliščih (po diagonali) je: s+ s +(m-1)·10 + m -1 = 2s +m10 -10 +m -1= **2s +11m -11**

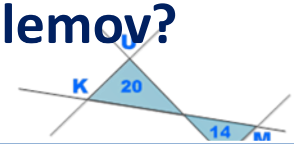
Torej: s+t = 2s +11m -11

Če število v zgornjem desnem oglišču kvadrata označimo z l (l = s+m-1), je število v nasprotnem oglišču (po diagonali) enako: k = s+ (m-1)10

Vsota: l+k= s+m-1 + s+ (m-1)10 = **2s + 11m -11**
(s je število v zgornjem levem izbranem kvadratu dimenzije m x m)

<u>**Ugotovitev: s+t = l+k**</u> Ugotovimo, da sta vsoti števil v nasprotnih ogliščih kvadrata m x m po levi in desni diagonali enaki.

Zakaj različne predstavitve in strategije reševanja problemov? Kaj smo se naučili?



problem	Predstavitev/strategija reševanja		
Vsota prvih n naravnih števil	Uporaba modela (stopnice) Povezati algebro in geometrijo	Algebraično reševanje Spretno urejanje algebraičnih izrazov - ustvarjalnost	Raziskovanje Opazovanje slike in iskanje novih povezav, zakonitosti,
Besedilni problem 1	Grafična predstavitev (dopolnjevanje slike)	S simbolnim zapisom – po korakih	enačba
Besedilni problem 2)	Empirični pristop	Postopno dopolnjevanje slike	Sistem enačb
Domine	Logično razčlenjevanje, postavljanje vprašanj	Skozi reševanje problema poglabljati tudi razumevanje	
Petkotnik	Deduktivno dokazovanje	Od splošnih spoznanj k posameznim primerom s pomočjo zakonov, načel, formul ...	
Kvadrat	Induktivno sklepanje, posploševanje	Od posameznega k splošnemu, od konkretnih primerov k posplošitvam, uporaba posplošitev pri posameznih primerih	

Sklepne misli

- Učenje specifičnih področij matematike se razvija vzporedno z veščinami za reševanje problemov.
- V procesu reševanja matematičnih problemov **razvijamo tako veščine** oz. strategije reševanja, kot tudi **poglabljamo razumevanje matematike**.
- Alternativne predstavitve in strategije reševanja problema razjasnijo problem z različnih perspektiv in omogočajo **uvid v problem**.
- Pomemben del procesa reševanja je **refleksija**. Ob refleksiji razmišljamo o metodah, ki smo jih uporabili, katere povezave smo naredili in uporabili, problematiziramo vse kar smo naredili.

HVALA ZA POZORNOST!