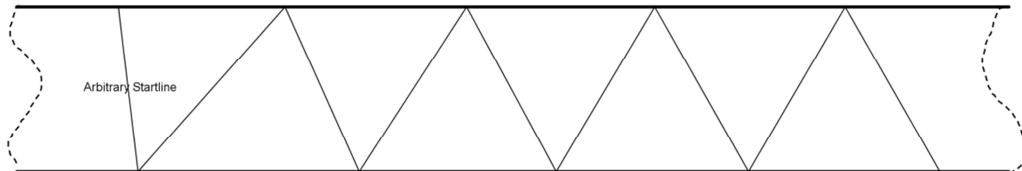
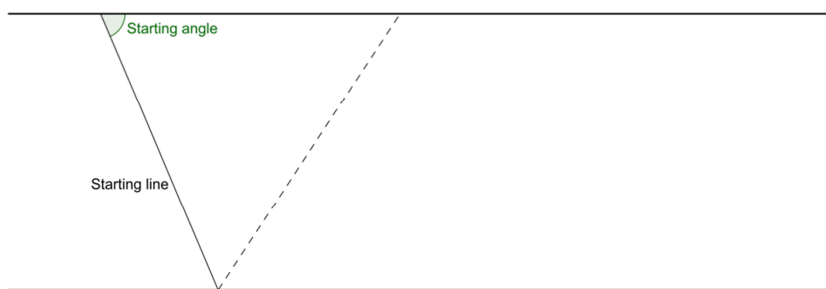


Naloga 1

- ✓ Začnite s poljubnim pregibom na listu.
- ✓ Naredite Pregib navzgor (U), da dobite nov pregib.
- ✓ Naredite Pregib navzdol (D), da dobite nov pregib.
- ✓ To ponovite (najprej U, nato D), da na listu dobite 14 trikotnikov.



- ✓ Ali opazite, da s ponavljanjem postopka postajajo trikotniki vse bolj pravokotni?
- ✓ To razložimo takole: izračunajmo velikost kota na traku za primer, ko je bil začetni kot 70° (glejte spodnjo sliko). Po kolikšnem številu pregibov je velikost kota blizu 60° (blizu pomeni, da je razlika manj kot 1°)?

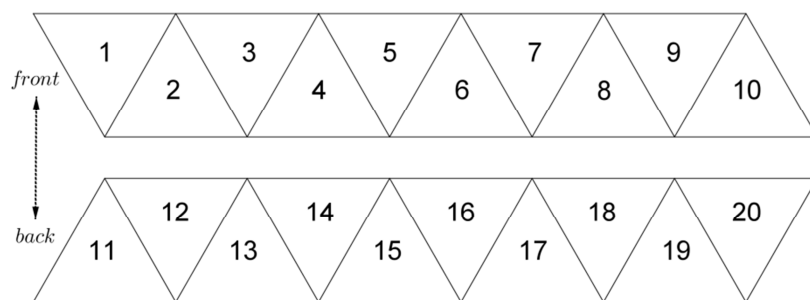


- ✓ Ali je jasno, da se to zgodi pri vsakem začetnem kotu? Če še niste prepričani, izračunajte velikost kotov za primer, ko je začetni kot 50° . Kaj če je začetni kot 60° ?
- ✓ Odrežite trak tako, da vam ostane 14 trikotnikov.
- ✓ Odrežite prve 4 trikotnike (prepričajte se, da so to res prvi štirje, ki ste jih dobili.) Dobili ste trak z natanko 10 trikotniki, ki so bolj ali manj enakostranični.
- ✓ Naredite flexagon (oglejte si navodila in se naučite 'flexati').
- ✓ Vsako lice pobarvajte z drugo bravo in spet flexajte. Kaj opazite?
- ✓ Ob koncu na sprednjo stran narišite nasmejan obraz, na zadnjo stran pa jezen obraz. To naredite narahlo s svinčnikom, ker boste kasneje obraz popravili v bolj prijazen obliko. Kaj opazite, ko flexate?
- ✓ Čestitamo. Zabavajte se s flexagoni. Ali lahko razložite, zakaj se žalosten obraz spremeni v nasmejanega (in obratno) po flexing? Bolj konkretno vprašanje: ali lahko opišete učinek flexing na večkotniku s pojmi iz geometrije (npr. rotacija)?

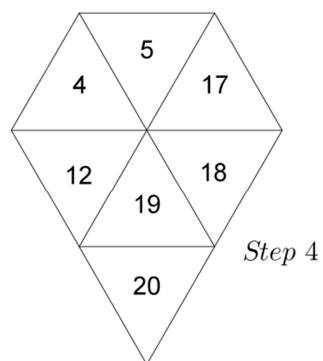
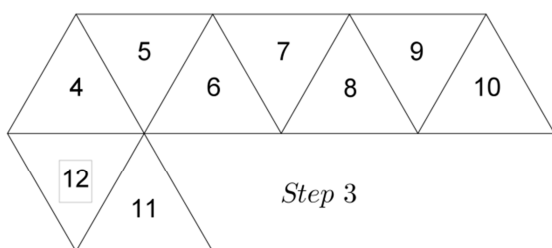
Izdelava flexigona

Sledite navodilom za prepogibanje traku z 10 trikotniki v flexagon s tremi stranmi.

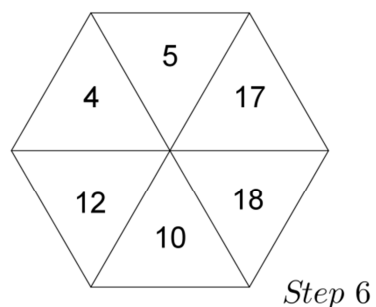
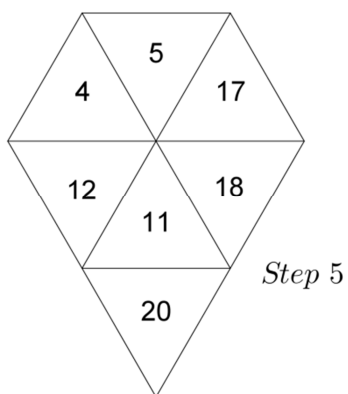
1. Začnite s trakom z 10 enakostraničnimi trikotniki. Vsak trikotnik označite kot na spodnji sliki. Naj bo orientacija ustrezna: trikotnik 1 ima vrh obrnjen navzdol. Trikotnik 11 je zadnja stran trikotnika 1...



2. Vsi pregibi naj bodo v obeh smereh, vse linije morajo biti zelo prožne.
3. Začnimo s trikotnikom 1-10, vrh trikotnika 1 je obrnjen navzdol. Prepognite trikotnik 1-3 pod trikotnike 4-10.

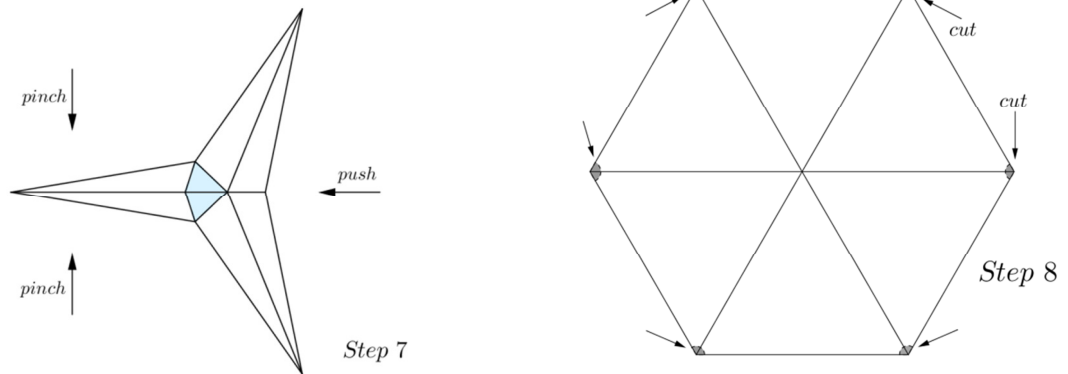


4. Trikotnike 7-10 prepognite na trikotnik 6.
5. Pozor! Trikotnik 11 postavite nad trikotnik 19.



6. Zadnji korak je, da trikotnik 20 prepognete na trikotnik 11. Dobili boste pravilni šestkotnik, kot je na sliki. Zalepite trikotnik 11 na trikotnik 20. Flexagon je narejen.

7. Kako flexati? Izberite dva sosednja trikotnika in ju stisnite skupaj. Potisnite sredino ostalih 4 trikotnikov proti središču (dobili boste vetrnico kot na spodnji sliki). Če izberete dva prava trikotnika, se središče malo odpre in pojavijo se skriti trikotniki. Če se središče ne odpre: stisniti boste morali druga dva trikotnika (vzemite npr. enega od trikotnikov, ki ste jih uporabili na začetku, vendar ga stisnite z drugim sosednjim trikotnikom).



8. Če flexanje ne gre gladko, verjetno pregibi niso dovolj natančni. Eden od načinov, kako to izboljšati je, da vsakega od robov zarezete kot na sliki. Tako bo za flexanje več prostora.

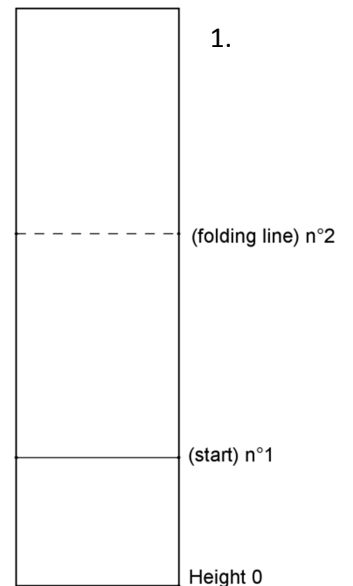
Naloga 3

Papirnati trak bi radi razdeleili na pet enakih delov brez merjenja.

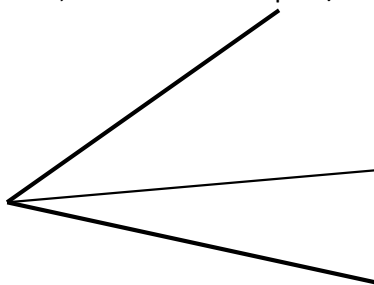
Trak položite pred seboj tako, da je višina daljša stranica. Ocenite, kje bi bila ena petina (merjeno od zgoraj navzdol) in naredite vodoraven pregib. Zraven zapišite številko.

1

- ✓ Naredite D (pregib Navzdol): prepognite zgornji rob papirja na vrh črte 1. To naredi nov pregib. Zraven zapišite številko 2.
- ✓ Spet naredite D: prepognite zgornji rob na črto 2, s tem ste naredili črto 3.
- ✓ Naprej naredite U (pregib navzgor): spodnji rob papirja prepognite na črto 3. S tem ste naredili črto 4.
- ✓ Naredite U, dobili ste črto 5.
- ✓ Črta 5 se nahaja na $1/5$ višine celotnega lista papirja, kar lahko preverite z ravnilom.
- ✓ Vzemite nov trak papirja in začnite tako, da bo ocena $1/5$ slaba (npr. blizu polovici). Naredili ste črto 1. Nadaljujte, kot zgoraj: D, D, U in U. Ali črta 5 leži na $1/5$ lista?
- ✓ Pojasnimo, kaj se je dogajalo. Recimo, da je bila ocena, kje je $1/5$, pravilna. Izračunjamo višino med črto 2 in 5 (naj ima trak višino 1 in naj bo spodnji rob na višini 0).
- ✓ Najverjetneje prva ocena ne bo točna. Recimo, da je prva ocena (in s tem višina črte 1) $1/5 + e$. Oznaka e pomeni napako in ta je lahko pozitivna ali negativna. Spet izračunajmo višino med črtama 2 in 5.
- ✓ Ali je črta 3 na $1/5$, merjeno od vrha navzdol? Pojasnite.
- ✓ Oblikujte zaključek.
- ✓ Kakšen bi bil postopek, če bi želeli črto na $2/5$ od spodnjega roba, pričeli pa bi s poljubno črto?

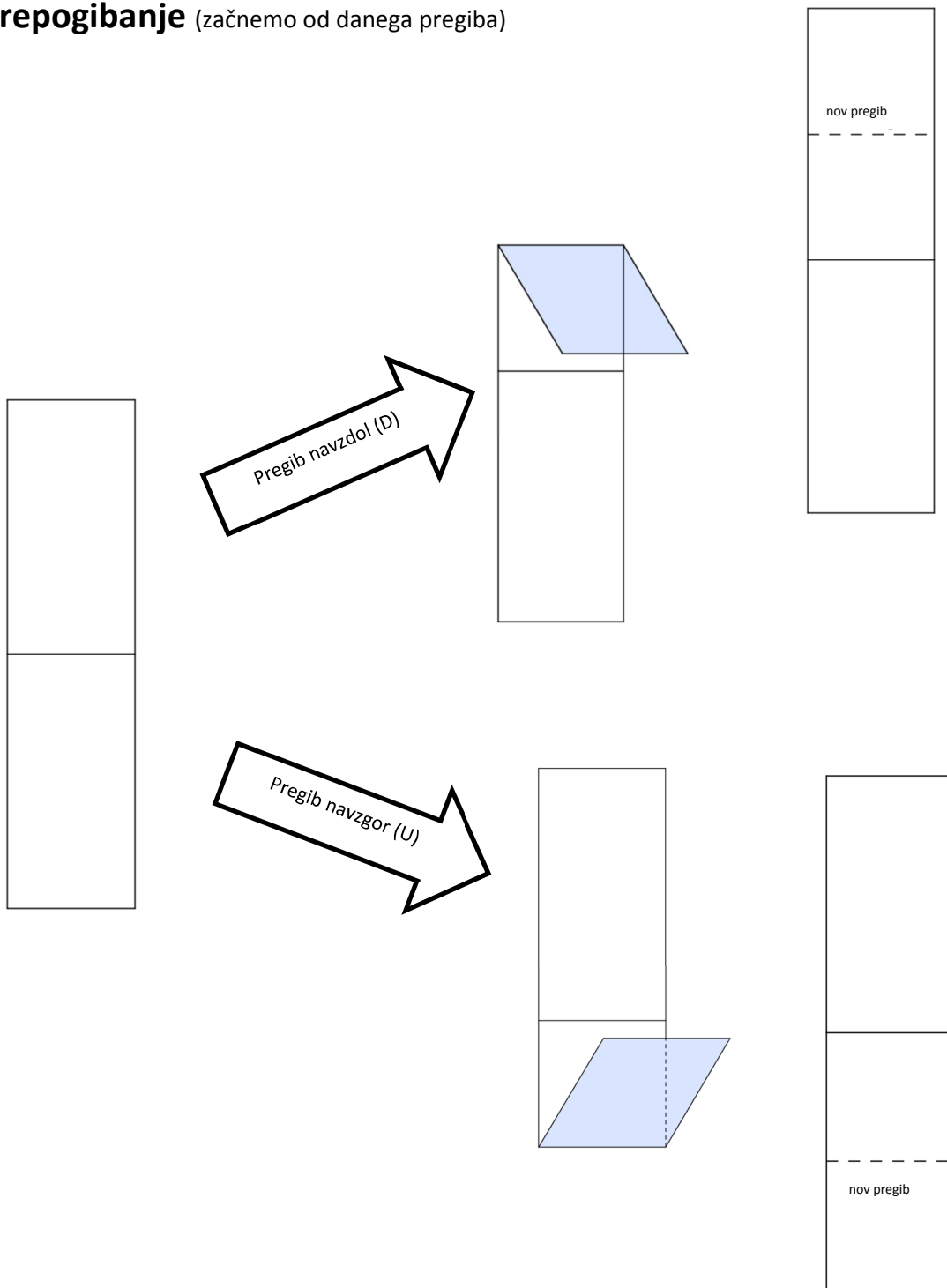


- Dodatek 1. Recimo, da želimo poljuben kot razdeliti na petine (slika). Ali lahko to naredimo s prepogibanjem? Ocenimo, kje bi bila $1/5$ in naredimo pregib. Oblikujte zaporedje pregibov tako, da boste končali pri $1/5$ danega kota.



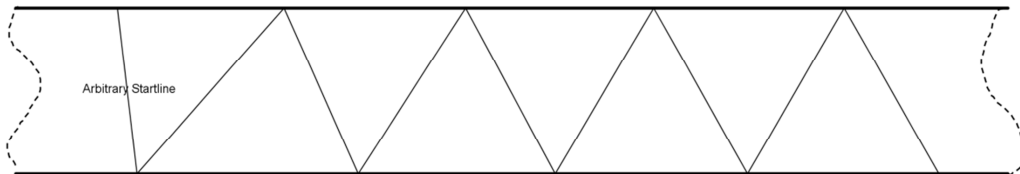
- Dodatek 2. Na novem listu papirja naredite pregib približno na 1/5 od spodnjega roba.
- Naredite D, U in U ter tako dobite črte 2-4. Na kolikšne dele ste razdelili list? Oz. na kateri višini je črta 4?
-

Prepogibanje (začnemo od danega pregiba)

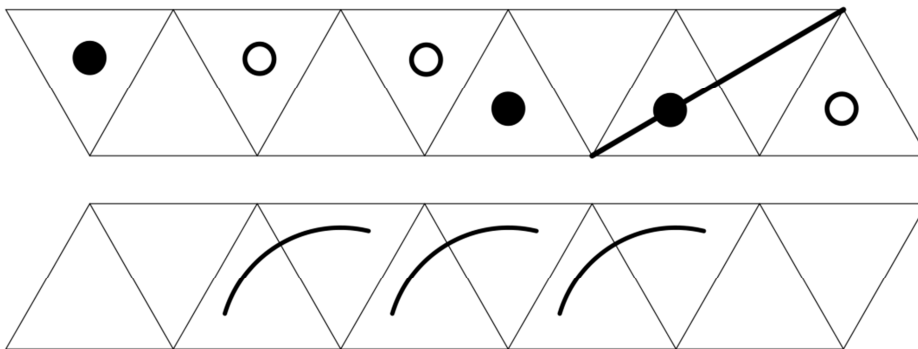


Naloga 2

- ✓ Začnite s poljubnim pregibom na listu.
- ✓ Naredite U in dobili ste nov pregib.
- ✓ Naredite D in spet dobite nov pregib.



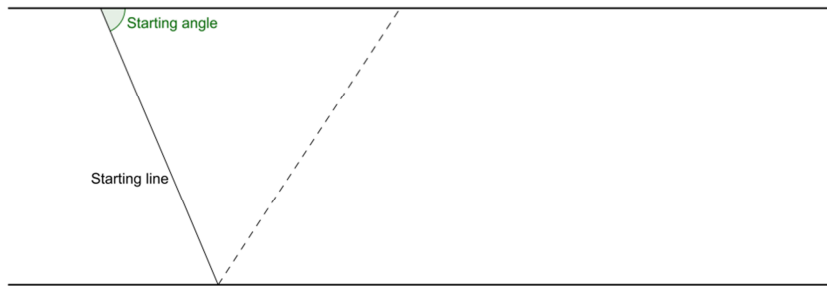
- ✓ To ponavljajte (U, D), dokler na listu ne dobite 14 'trikotnikov'.
- ✓ Opazite, da trikotniki postajajo vse bolj enakostranični? Odrežite list na prvem in zadnjem pregibu. Ostalo vam je 14 trikotnikov.
- ✓ Odrežite prve štiri trikotnike. Ostal vam je list z desetimi trikotniki, ki so bolj ali manj enakostranični.
- ✓ Na list narišite krožce, kot kaže naslednja slika. Prvi trikotnik na listu naj bo obrnjen navzdol (kot prvi trikotnik na sliki).
- ✓ Levi trikotnik v drugi vrsti naj bo hrbtna stran levega trikotnika v prvi vrsti (trikotnik 11).



- ✓ Naredite flexagon po navodilih (dodatek) in flexajte. Vsako lice pobarvajte z drugo barvo.
- ✓ Začnite z nasmejanim obrazom na prvi strani in flexajte. Kaže, da ste se po treh potezah vrnili na izhodiščni nasmejan obraz. To le delno drži. Lahko opazite, da se je izhodiščni obraz nekoliko zavrtel. Med flexanjem dobro opazuj robove šestkotnika. Kaj natanko se zgodi po treh potezah?
- ✓ Koliko potez je potrebnih, da se vrnemo v izhodiščno točko (obraz in orientacija)? Naredite seznam vseh različnih obrazov od začetka do konca.
- ✓ Opazili boste, da vidite le nasmejane obraze. Kako bi dobili žalosten obraz (ni pretežko)? To potezo imenujemo flip (obrat).

- ✓ Raziščite, ali je vrstni red potez pomemben? Drugače povedano: ali dobimo enako, če najprej naredimo nekajkrat flex in potem flip, kot če najprej naredimo flip in nato flex (isto število, kot prej)?
- ✓ Ali ima enake lastnosti še kakšen lik? Flex in flip ohranjajo obliko, točk pa ne. Kateri pravilni lik ima še tako lastnost?

- Dodatek. Razložimo, zakaj trikotniki postajajo vse bolj enakostranični. Izračunajte velikosti kotov na listu, če je bil prvi kot natanko 70° .

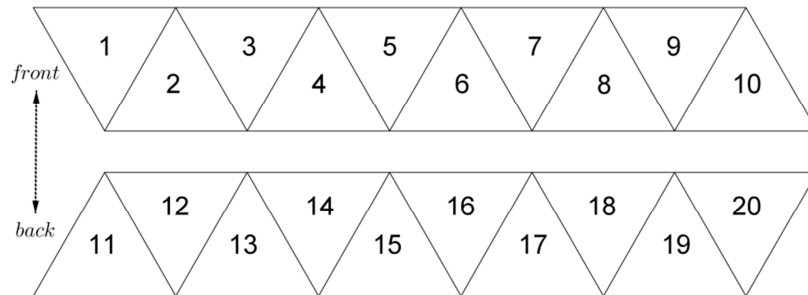


- Izračunajte velikosti kotov, če je bil prvi kot 50° (60°).
- Lahko dokažete, da v primeru poljubnega začetka s ponavljanja D in U trikotniki konvergirajo proti enakostraničnemu trikotniku?

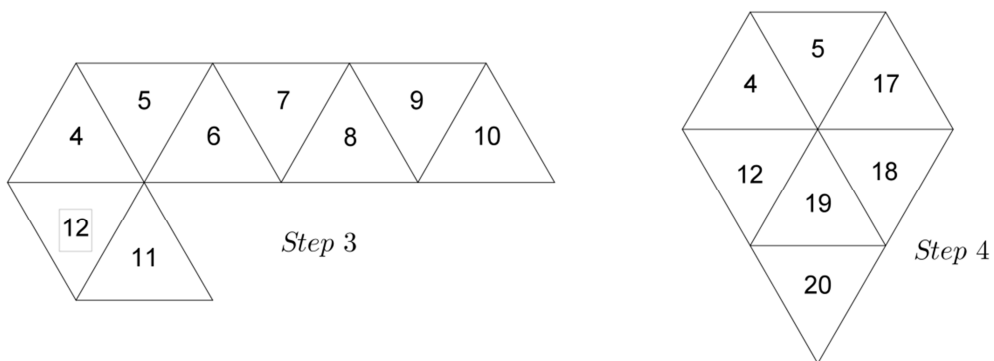
Prepogibanje flexigona

V naslednjih korakih je opisan postopek, po katerem iz lista z desetimi trikotniki dobimo flexigon s tremi lici.

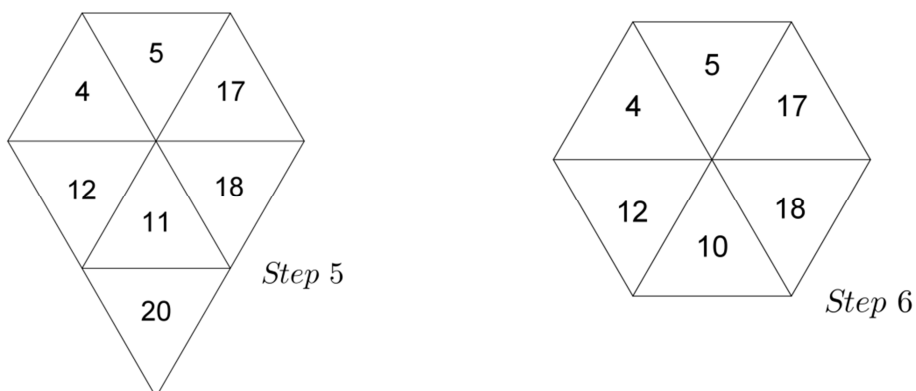
1. Začnemo z listom z desetimi enakostraničnimi trikotniki. Trikotnike oštevilčimo kot na sliki. Naj bo trikotnik 1 obrnjen navzdol. Pomembno je, da je trikotnik 11 hrbtna stran trikotnika 1.



2. Prepogibi naj bodo večkrat prepognjeni, da postanejo prožni.
3. Začnite s trikotniki 1-10, prepognite trikotnik 1 od zgoraj navzdol. Prepognite trikotnike 1-3 pod trikotnike 4-10.

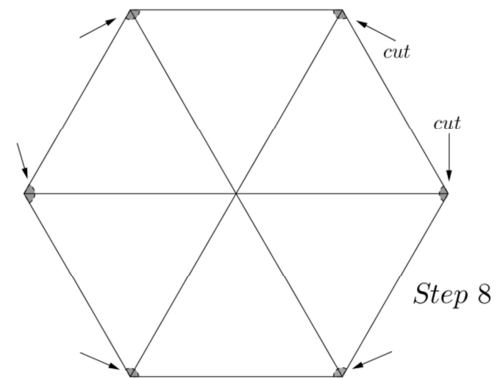
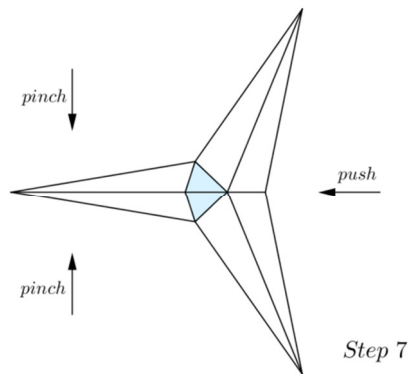


4. Prepognite trikotnike 7-10 na trikotnik 6.
5. Pozor! Postavite trikotnik 11 na vrh trikotnika 19.



6. V zaključnem koraku prepognete trikotnik 20 na trikotnik 11. Dobite pravilni šestkotnik kot na sliki. Zlepite trikotnika 11 in 20 skupaj, flexigon je pripravljen.

7. Kako flexati? Izberite dva sosednja trikotnika in ju stisnite skupaj. Sredino ostalih štirih trikotnikov ptisnite proti središču (dobite vetrnico kot na sliki). Če ste izbrali prava sosednja trikotnika, se bo sredina malo odprla in pokazali se bodo skriti trikotniki. Če se sredina ne odpre, izberite druga dva sosednja trikotnika (npr. prvi trikotnik naj ostane enak, sosednji pa naj bo drugi).



8. Če flexanje ne poteka gladko, so bili prepogibi premalo natančni. To lahko popravimo tako, da malo obrežemo vsako oglišče in tako pridobimo več prostora za flexanje.

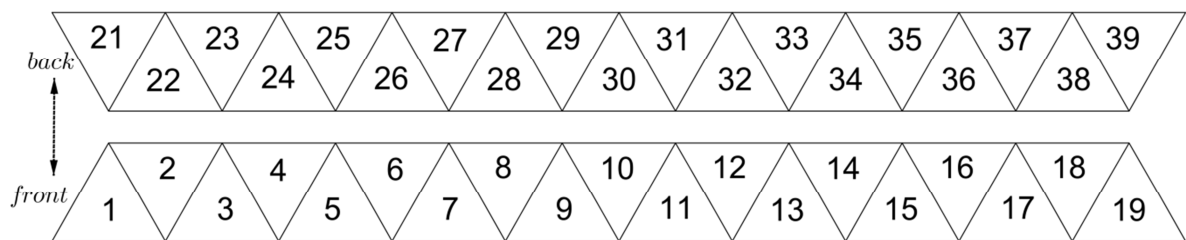
Naloga 4

- ✓ Začnite s poljubnim pregibom na listu papirja.
- ✓ Naredite D in dobili ste nov pregib.
- ✓ Naredite U in spet dobite nov pregib.
- ✓ Ponavljajte D in U, dokler ni na listu 23 trikotnikov.
- ✓ Opazite, da trikotniku postajajo vse bolj podobni enakostraničnemu trikotniku? Odrežite list s pregibi, da dobite list s 23 trikotniki.
- ✓ Odrežite prve štiri trikotnike (tiste, ki ste jih prepognili na začetku). Dobili ste 19 trikotnikov, ki so bolj ali manj enakostranični.
- ✓ Po navodilih naredite flexagon in ga preizkusite.
- ✓ Vsako lice pobarvajte z drugo bravo.
- ✓ Zapišite vse možnosti flexigona (barva spredaj/zadaj) in načine, kako prehajate iz ene v drugo možnost.
- ✓ Kateri barvi sta najbolj oddaljeni, če definiramo oddaljenost kot število flexov iz ene do druge?

Navodila za prepogibanje

- Oštevilčite trikotnike kot na sliki: trikotnik 1 naj bo obrnjen navzdol. Trikotnika 20 ni, saj je ima zadnja stran trikotnika za 20 večjo številko kot sprednja stran (npr. zadnja stran trikotnika 1 ima številko 21). Trikotnike rahlo obarvajte. Trikotnike 1,4, 7, 10, 13, 16 z eno barvo, trikotnike 2, 5, 8, 11, 14, 17 z drugo barvo, trikotnike 3, 6, 9, 12, 15, 18 s tretjo barvo, trikotnike 22, 23, 28, 29, 34, 35 s četrto barvo, 24, 25, 30, 31, 36, 37 s peto barvo in trikotnike 26, 27, 32, 33, 38, 39 s šesto barvo. Trikotnika 19 in 21 nista pobarvana.

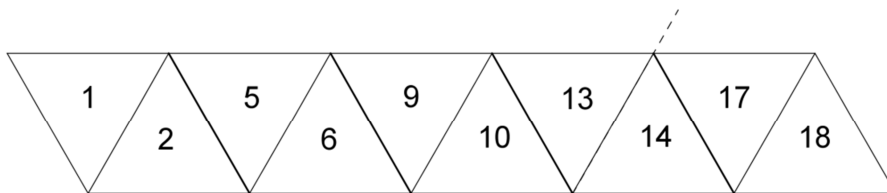
Vse pregibe večkrat prepognite v obe smeri, da postanejo prožni.



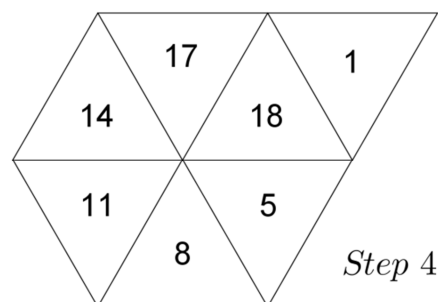
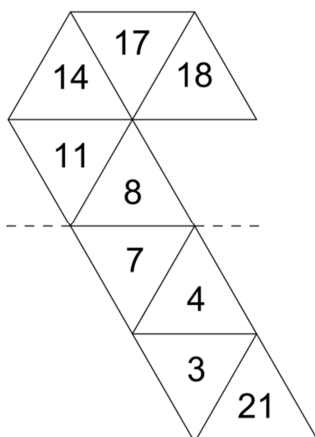
- Začnimo s sprednjo stranjo. Prepognite po črti med tretjim in četrtem trikotnikom: trikotnika 23 in 24 gresta drug na drugega (prepogib izpod). Prepogibajte, dokler ne bo trikotnik 5 zraven trikotnika 2.

Sedaj naredite podobno tako, da prepognete po črti med trikotnikoma 7 in 8...

Iz lista pravzaprav naredite sploščeno spiralo, ki spredaj zglada kot na naslednji sliki.

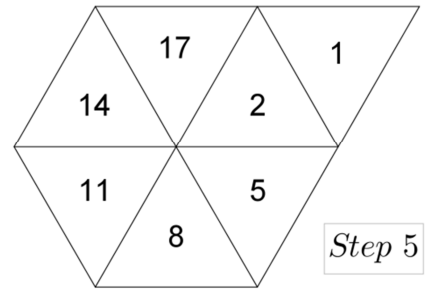


- Prepognite levi del pod desni del okrog črte med trikotnikoma 13 in 14. Dobili boste nekaj podobnega, kot je na naslednji sliki.

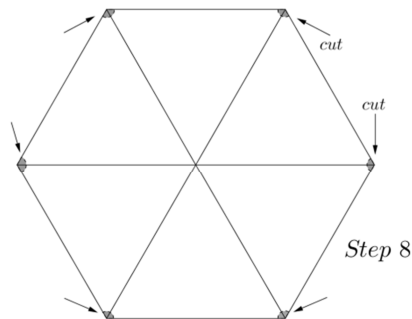
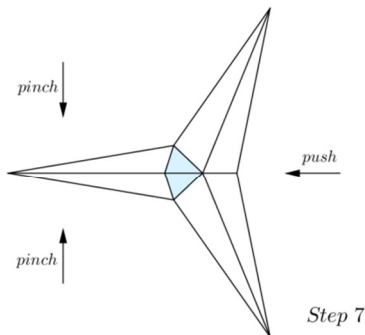


- Prepognite po črti 8-7 (kot na prejšnji levi sliki) in dobite sliko na desni.

- Zadnji del traku gre na vrh trikotnika 18 (ali drugače, trikotnik 18 prepognite pod zadnji del lista kot na desni sliki).
- Trikotnik 1 prepognite nazaj. Če so bili vsi pregibi pravilni, bo trikotnik 21 na trikotniku 19. Trikotnika 19 in 21 zlepite skupaj. Tako naredili ste fleksagon s šestimi različnimi barvami.



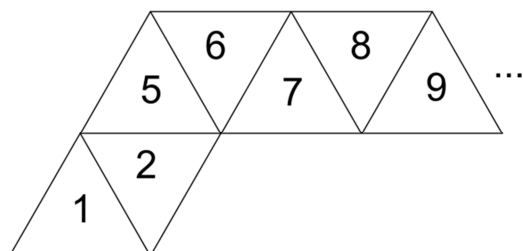
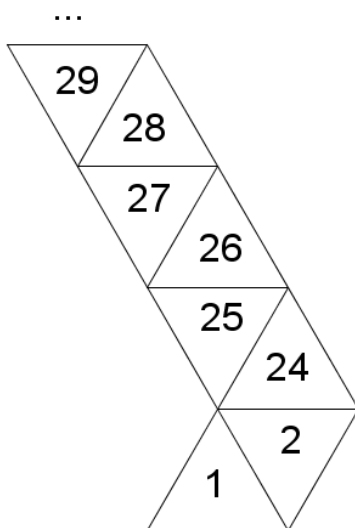
- Naučimo se flexati. Izberite dva sosednja trikotnika in ju stisnite skupaj. Sredino ostalih štirih trikotnikov potisnite proti središču (dobite vetrnico kot na naslednji sliki). Če ste izbrali prava sosednja trikotnika, se središče nekoliko odpre in pokažejo se skriti trikotniki. Če se sredinae ne odpre, izberite druga dva trikotnika (npr. prvi trikotnik naj ostane enak, sosednji pa naj bo drugi).



- Če flexanje ne poteka gladko, pregibi niso bili dovolj natančni. To lahko popravimo tako, da malo obrežemo vsako oglišče in tako pridobimo več prostora za flexanje.

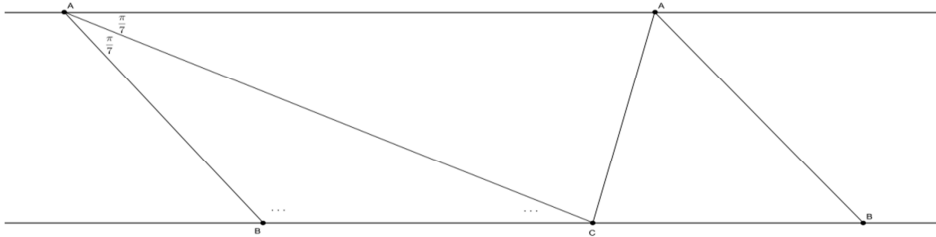
!! Opomba (iz prvega v drugi korak) !!

V originalnem prispevku so številke v trikotniku iz koraka 2 napačne in so popravljene. Dodani sta še dve sliki, ki ponazarjata vmesno stopnjo med prvim in drugim korakom.



Naloga 5

- ✓ Poglejmo, zakaj se se D_2U_1 lahko prepogne v pravilni sedemkotnik (kot v navodilih). Gre pravzaprav za kote, zato izračunajte velikost zunanjih kotov v pravilnem sedemkotniku.
- ✓ Recimo, da na traku D_2U_1 začnemo s kotom $2\pi/7$ med AB in zgornjim robom traku. Pregib AC razpolovi ta kot in dobimo dva kota z velikostjo $\pi/7$ (kot na naslednji sliki). Izračunajte velikosti ostalih kotov. Kaj opazite?



- ✓ Pojasnite, zakaj je potrebno gledati ravno kot $2\pi/7$ (če prepogibamo kot v navodilih).
- ✓ Recimo, da ne začnemo z ustreznim kotom t.j. kotom $2\pi/7$, ampak naj bo začetni kot $2\pi/7 + \epsilon$. ϵ pomeni 'napako', ki je lahko pozitivna ali negativna. Izračunajte velikosti prvih štirih kotov traku D_2U_1 in opišite, kaj dobite. Ali lahko pravilni sedemkotnik dobimo s prepogibanjem brez kotomera?
- ✓ V nadaljevanju se posvetimo naslednjemu vprašanju: ali lahko za pravilni večkotnik 'izračunamo' način prepogibanja? Odgovor ni težek v primeru, če ima večkotnik liho število oglišč n . Tedaj sledi:

1. vsi a_i so lihi
2. $a_1 = 1$
3. $n - a_i = 2^{b_i} \cdot a_{i+1}$
4. $a_{m+1} = a_1 = 1$

$$n \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_m \end{vmatrix}$$

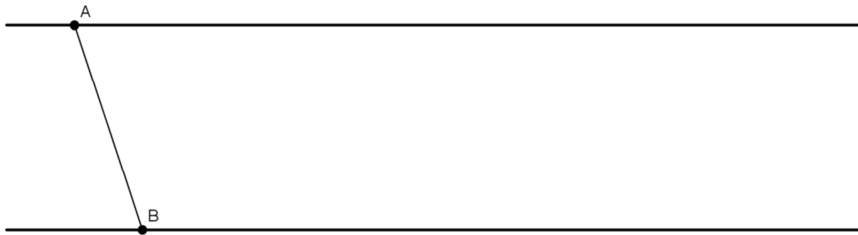
Za pravilni sedemkotnik dobimo:

$$7 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

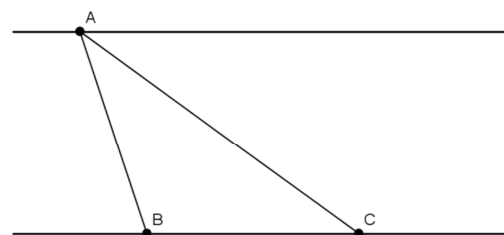
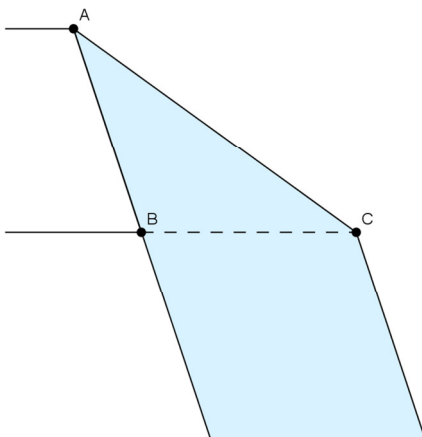
- ✓ Pojasnimo, kaj pomenijo oznake. V drugi vrsti preberemo, kako naredimo trak: za pravilni sedemkotnik je to U_1D_2 (ali D_1U_2). Števila v prvi vrsti povedo, katri pravilni večkotniki so možni s tem trakom (več v prispevku).
- ✓ Zapišite podobno oznako za prepogibanje pravilnega petkotnika.
- ✓ Kakšen je trak za pravilni petkotnik? Izdelajte ga in naredite pravilni petkotnik.
- ✓ Postopek opišite, pri čemer uporabite kote.

- Dodatek. Zapišite oznako za pravilni 31-kotnik. Kakšen je v tem primeru trak?

Navodila za prepogibanje (s prepogibanjem nadaljujete od dane črte)

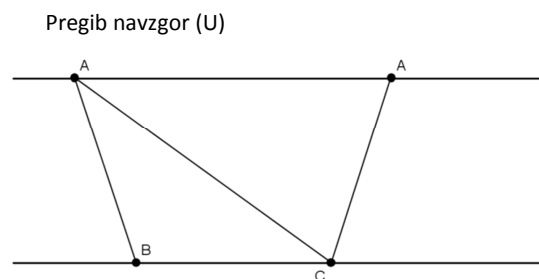
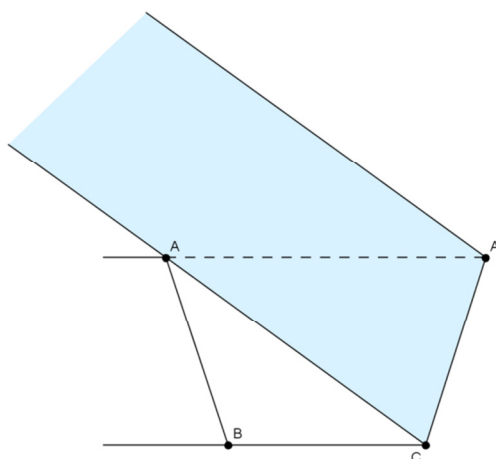


Lahko prepognete navzdol (pregib D) od črte AB. Zgornji del traku prepognite v točki A na črto AB (kot na naslednji sliki, kjer je zadnja stran papirja osenčena). Dobite nov pregib. Če trak razgrnete nazaj, je na traku vidna črta AC kot na spodnji desni sliki.



Pregib navzdol (D)

Lahko prepognete navzgor (pregib U) od črte AC. Spodnji rob papirja prepognete v točki C na črto AC (naslednja leva slika). Dobite nov pregib. Če trak razgrnete, je vidna črta CA:



Pregib navzgor (U)