Matematika z zvitkom papirja

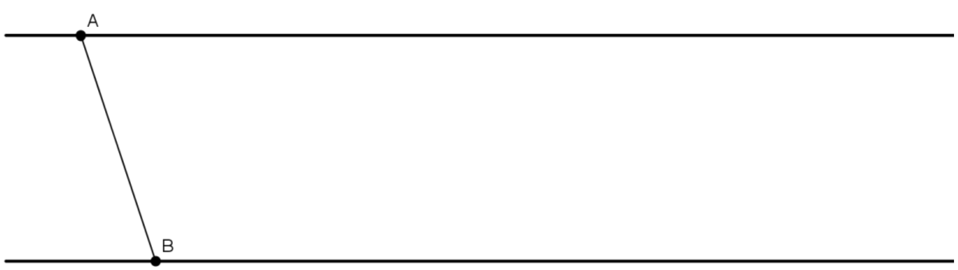
Adriaan Herremans
adriaan.herremans@uantwerpen.be

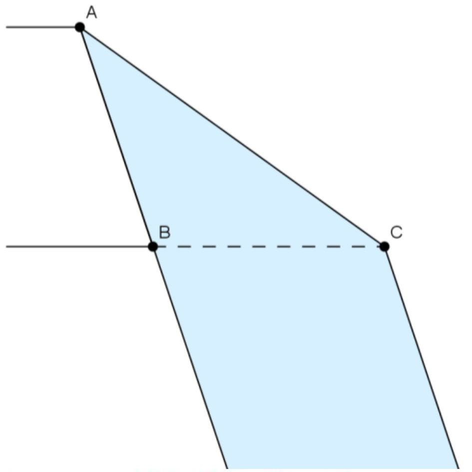
Prepogibanje papirnatega zvitka?

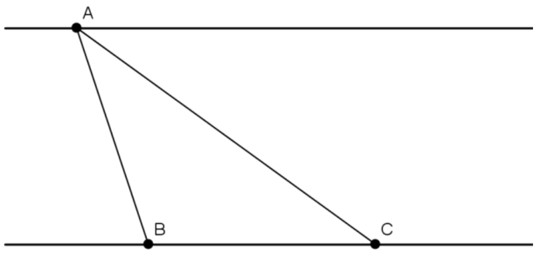
- Prepogibanje daljšega papirnatega traku (papirnatega zvitka)
- Začnemo s poljubnim pregibom.
- Za nov pregib je potrebno poznati le zadnji pregib. Prepogibamo od leve proti desni.
- Imamo dve vrsti pregibov: pregib navzdol (D) in pregib navzgor (U).

D: prepogib navzdol

Na zadnji črti prepognite zgornji rob traku (desni del) navzdol. Dobite nov pregib.



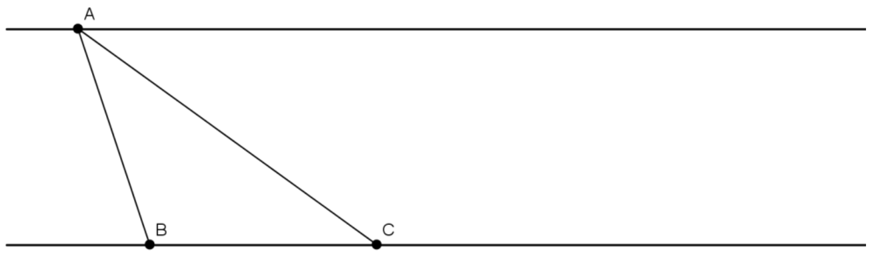


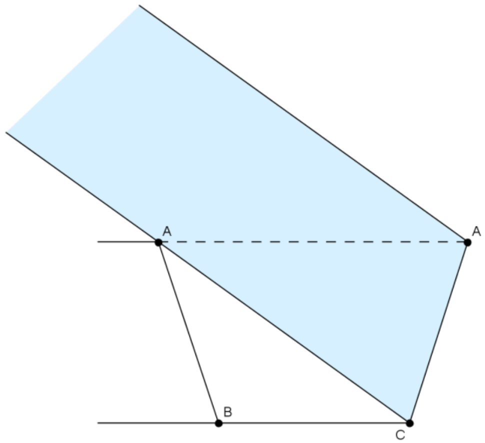


Folding Downwards (D)

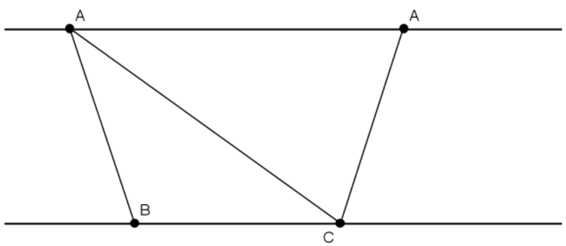
U: prepogib navzgor

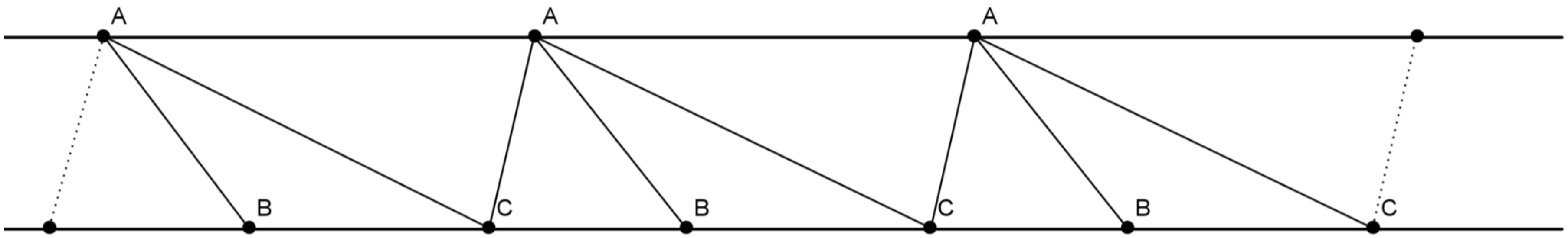
Na zadnji črti prepognite zgornji rob traku (desni del) navzgor. Dobite nov pregib.





Folding Upwards (U)

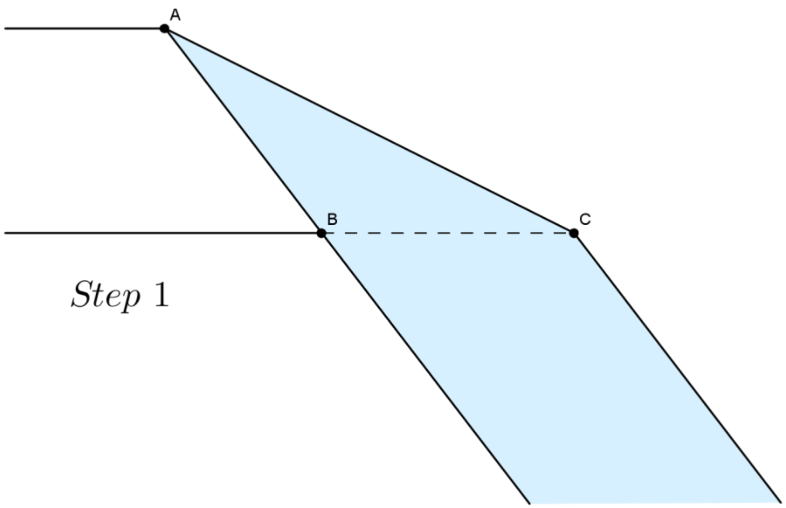


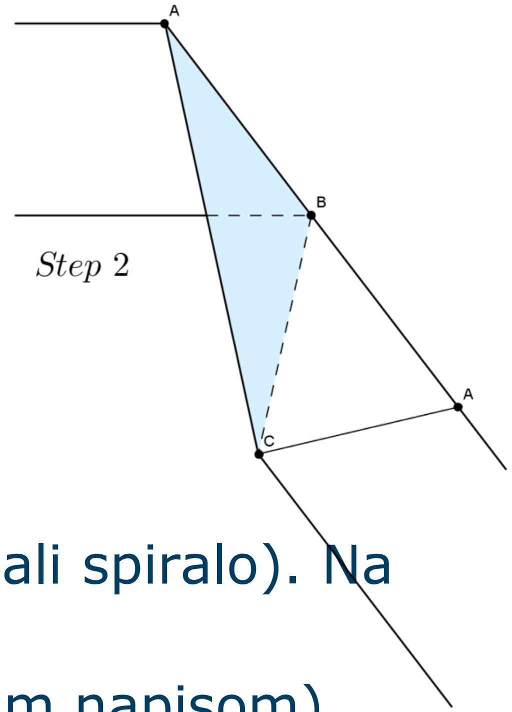


- Zgornji trak je nastal s ponavljanjem D_2U_1, kar pomeni dva pregiba navzdol, en pregib navzgor.
- Katere like lahko naredimo s takim trakom? Ali opazite simetrijo?

S prepogibanjem do pravilnih večkotnikov

1. Zgornji rob traku prepognite navzdol po levi črti AB.

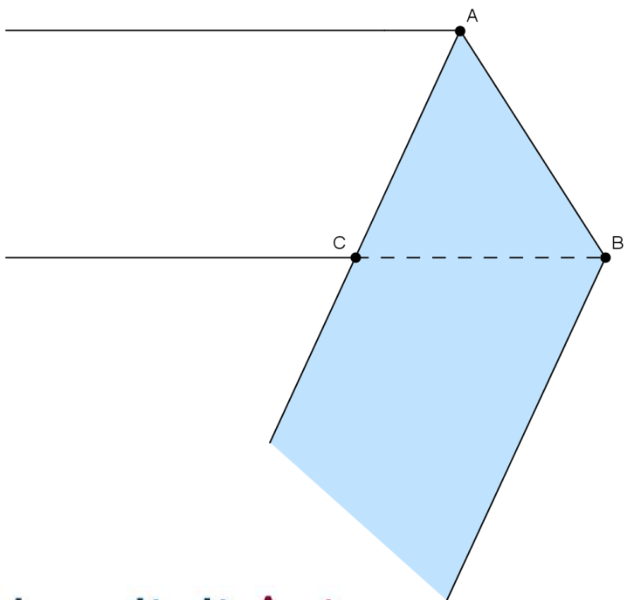


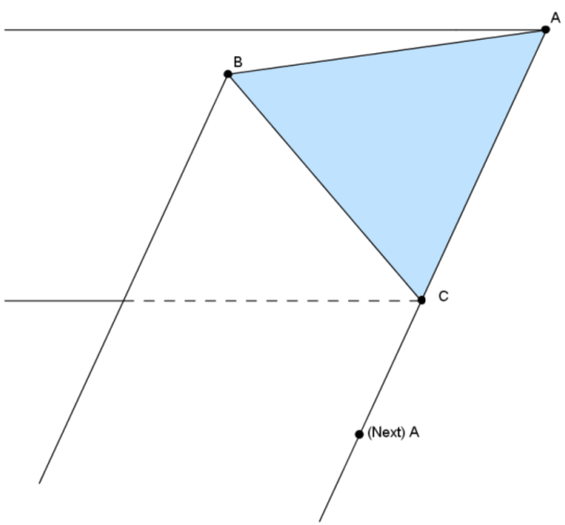


2. Spet prepognite po črti AB (kot bi delali spiralo). Na zgornjem robu bo vidna točka A.
3. Ta postopek ponavljajte (slika z rdečim napisom).

Še en primer

1. Zgornji levi rob traku prepognite navzdol po levi črti AC.
2. Spet prepognite po črti AC (kot bi delali spiralo).
3. Ta postopek ponavljajte (slika z modrim napisom).



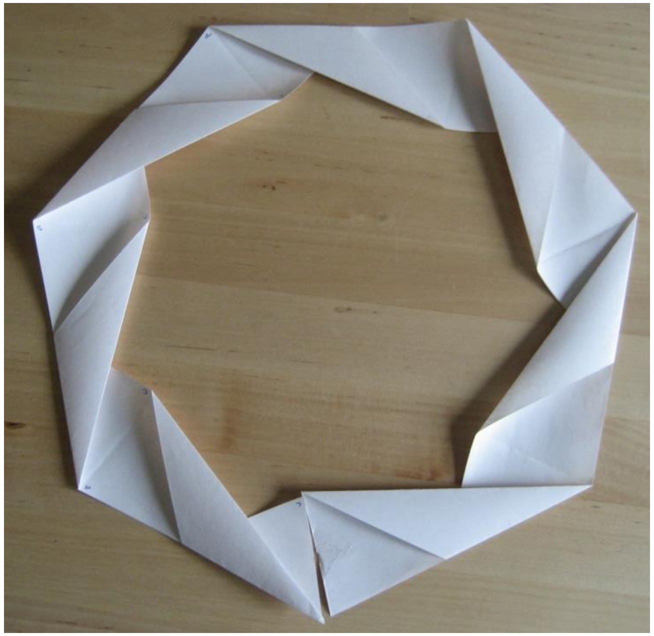


Universiteit Antwerpen

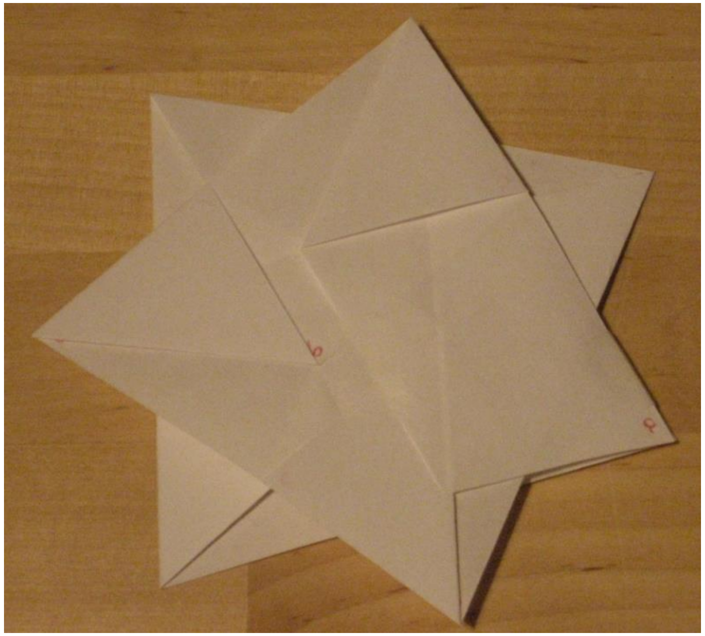
Rezultat?

Kaj opazite na zunanjem robu lika?

Slika 1 (rdeč napis)

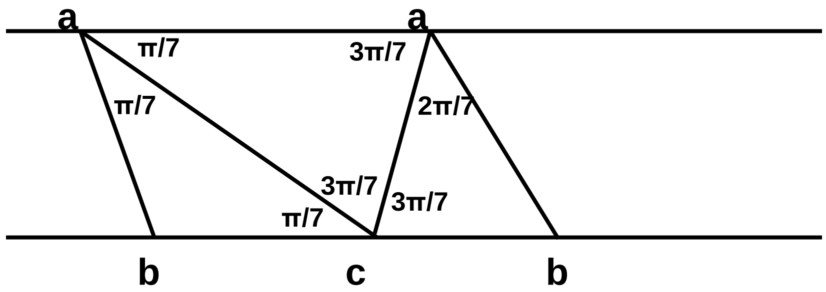


Slika 2 (moder napis)



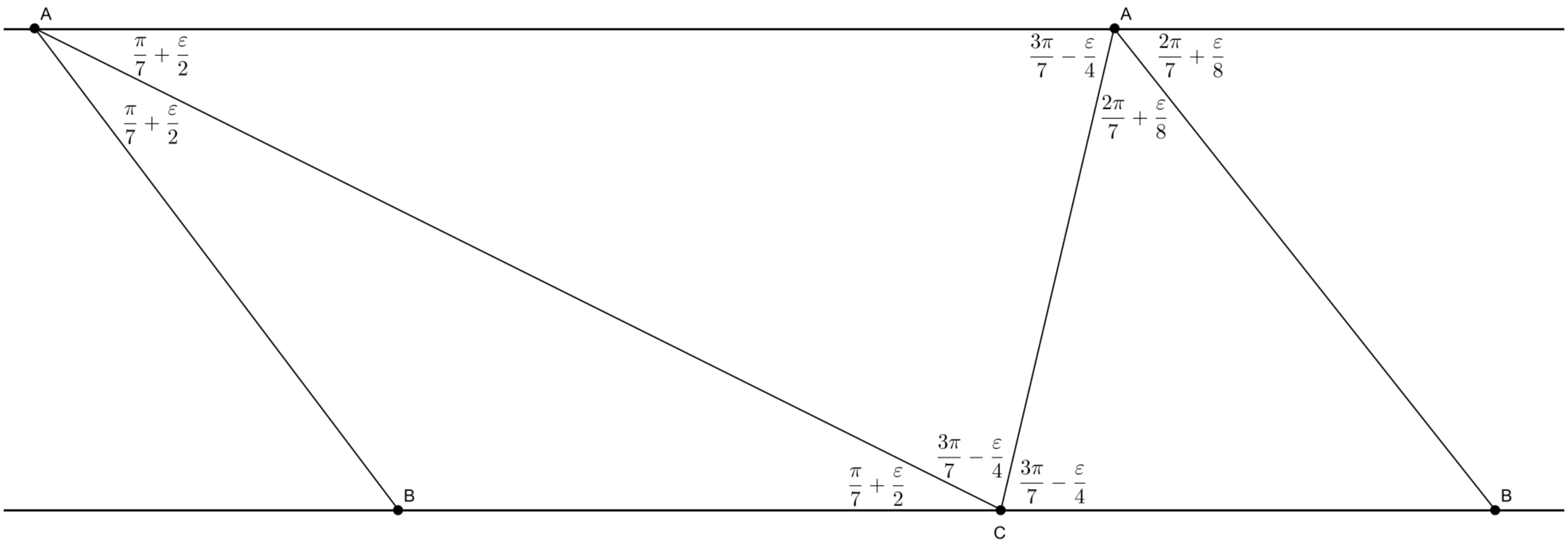
Zakaj sedemkotnik? (Naloga 5)

- Izračunajte velikost zunanjega kota v pravilnem sedemkotniku: $2\pi/7$.
- Recimo, da ste slučajno po pregibu z zgornjim robom naredili kot $2\pi/7$ …



Sedemkotnik: konvergenca

- Recimo, da pričnemo s kotom $2\pi/7$ + e (napaka e je lahko pozitivna/negativna).



- Z vsakim pregibom se napaka e razpolovi → eksponentna konvergenca

Oznaka prepogiba

- Pravilo:

1. vsi a_i so lihi
2. $a_1=1$
3. $n-a_i = 2^{b_i}.a_{i+1}$
4. $a_{m+1}=a_1=1$

$$\begin{array}{c|ccccc|} \mathbf{n} & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_m \end{array}$$

- Primer: sedemkotnik

  $7-1 = 6 = 2^1.3$

  $7-3 = 4 = 2^2.1$

$$\begin{array}{c|cc|} \mathbf{7} & 1 & 3 \\ & 1 & 2 \end{array}$$

- Druga vrsta: pove, kako prepogibati.

Vaja (Naloga 5)

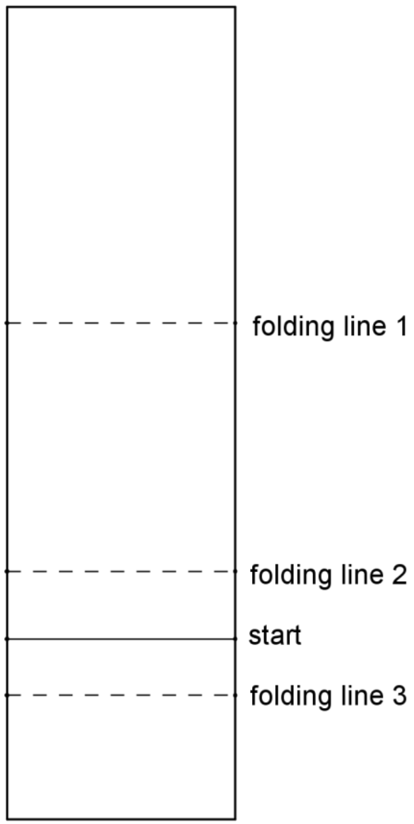
- Izračunajte oznako pregiba za pravilni 31-kotnik.

31	1	15
	1	4

- Sklep: prepogibanje D_4U_1 (ali U_4D_1) da ustrezen kot, da lahko naredimo pravilni 31-kotnik.

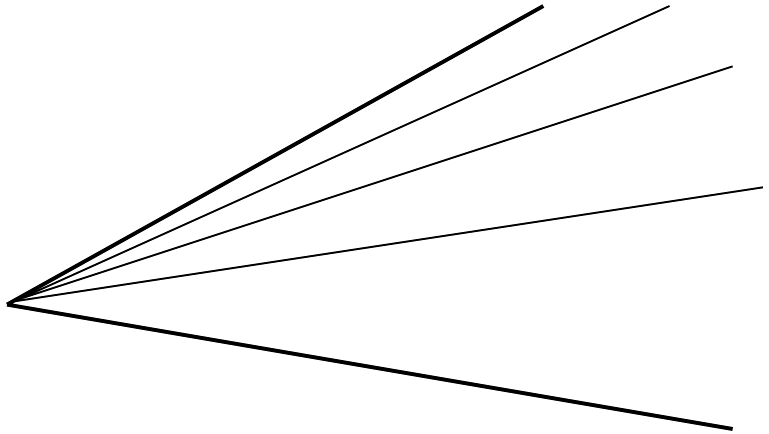
Deljenje pravokotnika(Naloga 3)

- D_1U_2 lahko uporabimo za deljenje pravokotnika na 7 enakih delov.
- Ocenite, kje je 1/7 in prepognite (na višini 1/7+e).
- Črta 1 je na višini 4/7 + e/2.
  Črta 2 je na višini 2/7 + e/4.
  Črta 3 je na višini 1/7 + e/8.
- Možno je tudi $2/7^{th}$, $3/7^{th}$,…
- D_2U_2 lahko uporabimo za deljenje pravokotnika na $a/5^{th}$ delov za vsak a.



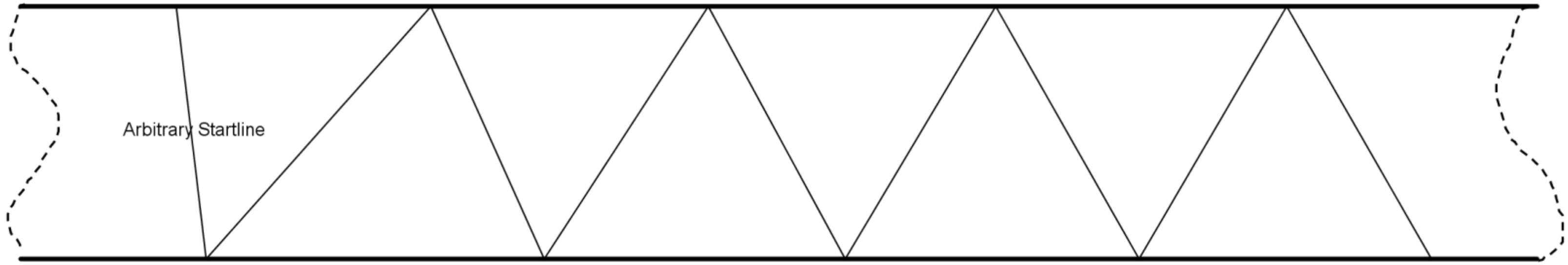
Deljenje kotov...

- Pravzaprav gre pri zaporednem prepogibanju za ‘konvergiranje‘ proti racionalnem številu a/n.
- Poljuben kot lahko razdelimo na tri enake dele s ponavljanjem U_1D_1.



Flexagoni

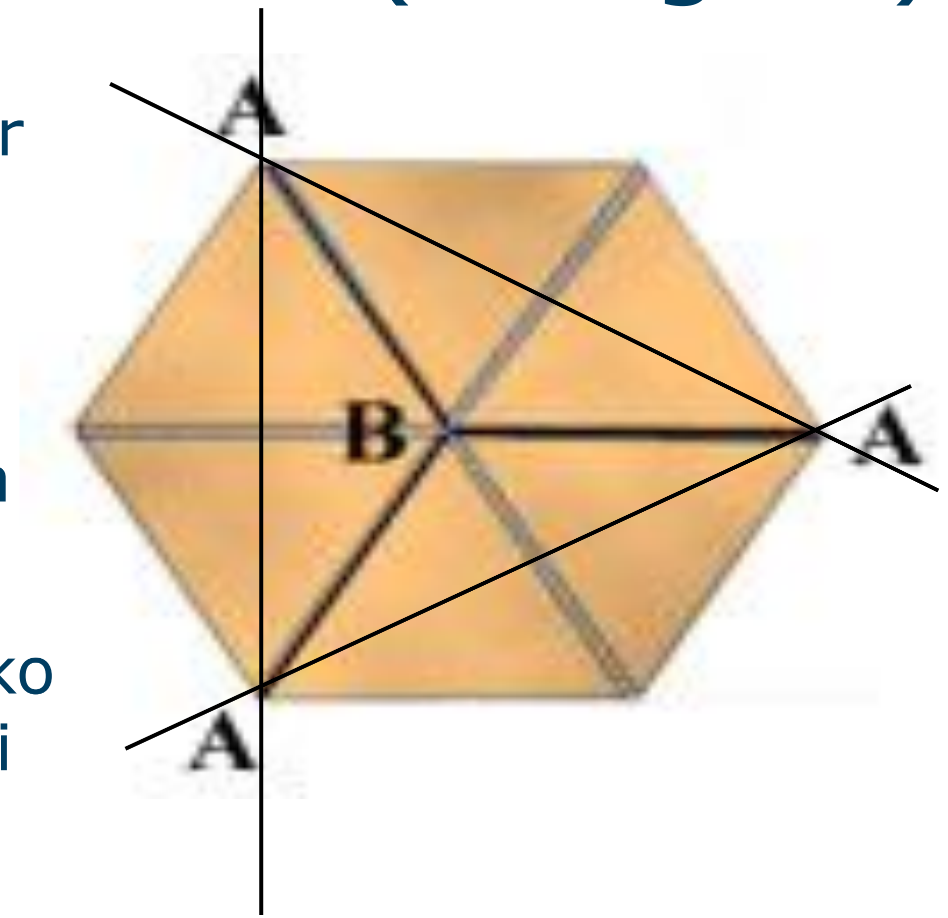
- "Flexibilni" večkotniki (Artur Stone 1939)
- Za flexagon s tremi lici potrebujete trak z desetimi enakostraničnimi trikotniki (Nalogi 1 & 2).
- Brez kotomera to naredimo s ponavljanjem D_1U_1. Spet se srečamo z eksponentno konvergenco.



Universiteit Antwerpen

Poteze za " flexing " (Naloga 1)

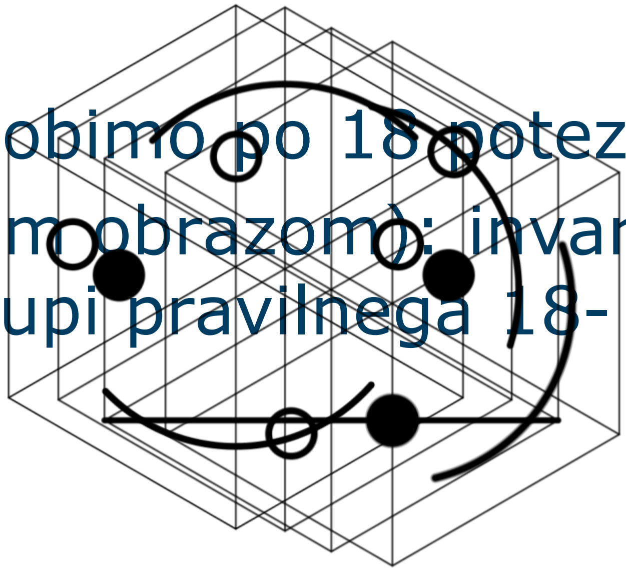
- Pri flexanju se vsak par trikotnikov zasuka okrog središčne osi.
- Osi tvorita kot 60°, pripadajoča trikotnika pa se zasučeta za 120°.
- 3D geometrija nas lahko preseneti (veseli/žalostni obraz).



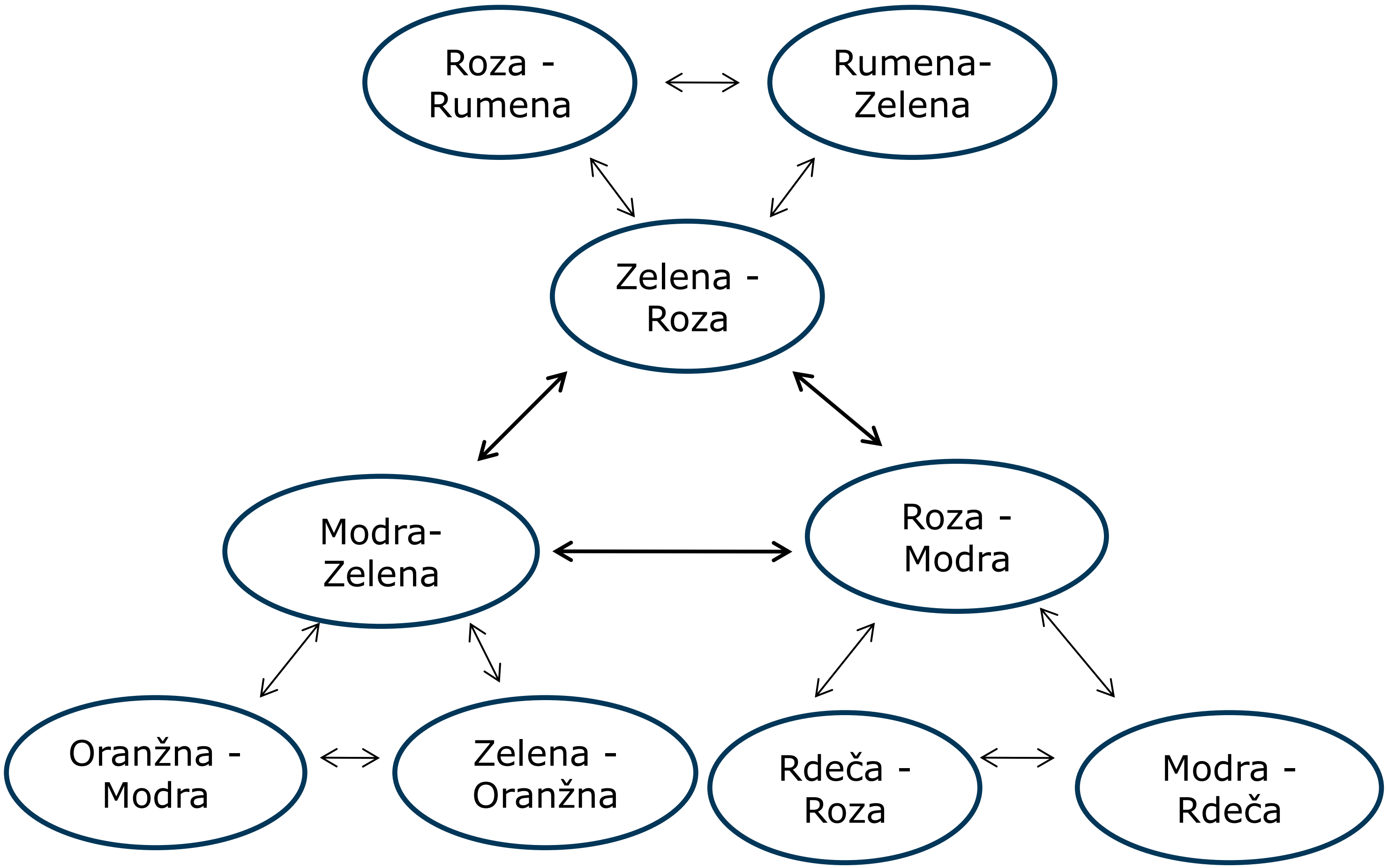
Universiteit Antwerpen

Invariantnost (Naloga 2)

- Glede na to, da imamo tri lica, bi pričakovali, da se po treh potezah vrnemo v začetno stanje.
- Če smo pozorni, opazimo, da po treh potezah pridemo do istega obraza, vendar je zasukan za 60°.
- Začetno stanje tako dobimo po 18 potezah.
- Zaključimo (z žalostnim obrazom): invariantna grupa je izomorfna grupi pravilnega 18-kotnika.



Predstavitev možnosti (Naloga 4)



Universiteit Antwerpen

Opombe

- Učenci se učijo natančnega dela.
- Obstajajo flexigoni s 3, 4, 5, 6, 7 različnimi lici.
- Poleg trikotnikov so možne tudi druge oblike.
- Tu se ponuja možnost, da matematiko naredimo bolj osebno (z risbami, fotografijami).

Didaktični zaključek

- Matematika kot razlaga tistega, kar vidimo, doživimo.
- Različne teme
- Različna težavnost, različne (stopnjevanje) naloge
- Priložnost, da svoje učence presenetite in izzovete.
- Priložnost za osebno noto
- Povezava s kurikulom
- Preprost in poceni material
- Priložnost za samostojno raziskovanje

Danes ob 17h (hotel Toplice):
An international initiative to stimulate research competences in mathematics

→ Za učitelje dijakov 17+

Vprašanja?

Viri

1. Hilton P., Holton D., Pedersen J., Mathematical Reflections: In a Room with Many Mirrors, Springer-Verlag, New York 1998, 351p.
2. Hilton P., Holton D., Pedersen J., Mathematical Vistas: From a Room with Many Windows, Springer-Verlag, New York 2002, 358p.
3. Hilton P., Pedersen J., Walser H., The faces of the tri-hexaflexagon, Mathematics Magazine vol. 70, October 1997, p.243-251
4. Polster B., Variations on a Theme in Paper Folding, American Mathematical Monthly nr. 111, January 2004, p.39-47
5. Pook L., Flexagons Inside Out, Cambridge University Press 2003, 182p.
6. Tekulve A., Understanding Polygons and Polyhedrons Using Flexagons, The Montana Mathematics Enthusiast, vol. 1, nr. 1, 2004, p. 20-28.