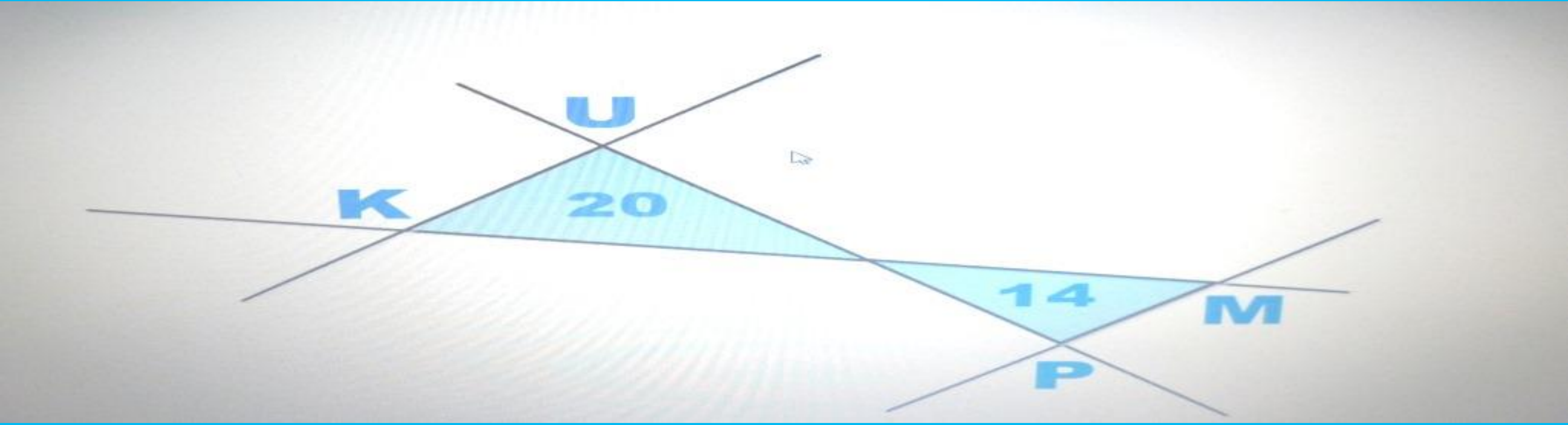
ALI JE SMISELNO PONOVNO PREMISLITI OSNOVE?

Prof.ddr. Janez Žerovnik, FS, Univerza v Ljubljani



Povzetek

Prispevek obravnava problematiko poenostavljanja matematičnih pojmov,   obravnave in poenostavljanja izražanja v šolski matematiki. Obravnava primere, ko raznovrstna poenostavljanja vodijo do nekonsistentnosti in drugačnih težav, ki lahko postanejo zelo neprijetne pri preverjanju, posebej pri eksternem preverjanju, kakršno je srednješolska matura.

ALI JE SMISELNO PONOVNO PREMISLITI OSNOVE?

- Uvod - motivacija
- Definicija funkcije
- Ničle polinomov
- Vektorji
- Nedoločeni integral
- Zaključek

UVOD - MOTIVACIJA

- **maturitetni izpit** : pregled in povzetek srednješolske matematike in **priprava na študij**
- Osnovni pojmi – ali je tu res vse jasno !?
- Nekaj primerov za razmislek...

Definicija funkcije

- Teorija množic
- Analiza - realne funkcije
- Domena in kodomena ←→ (naravno) definicijsko območje in zaloga vrednosti

Definicija funkcije

- Teorija množic :

»Funkcija iz množice A v množico B je predpis, ki vsakemu x iz množice A priredi y iz množice B.«

- Analiza - realne funkcije :

»Funkcijo, ki preslika realna števila v realna, imenujemo realna funkcija realne spremenljivke.« in potem kasneje

»Ali je predpis, ki vsakemu realnemu številu priredi njegovo obratno vrednost, funkcija?«

pa seveda standardno govorimo o »funkciji sinus«, »funkciji x^2«, »funkciji $1/x$« in o »funkciji $\frac{p(x)}{q(x)}$ «.

Definicija funkcije

Na kratko opišimo možno rešitev, ki še najmanj posega v običajne pristope poučevanja:

Preslikava ali funkcija (v teoriji množic, torej nasploh v matematiki) je določena s trojico $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{f})$, kjer sta $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$ množici, $\boldsymbol{f}$ (ali $\boldsymbol{f}(.)$) pa je predpis ki vsakemu elementu iz množice $\boldsymbol{A}$ priredi natanko en element iz množice $\boldsymbol{B}$. Pogosto uporabimo okrajšavo $f = (A, B, f)$. Množici A in B imenujemo domena in kodomena. **Pri obravnavi realnih funkcij realne spremenljivke se dogovorimo, da lahko funkcijo definiramo s predpisom.** Tihi dogovor, ki je kot kaže pogosto »pretih«, pa je naslednji: **kodomena je v takem primeru množica realnih števil, domena pa je naravno definicijsko območje predpisa $\boldsymbol{D_f}$.** To je največja podmnožica $\mathbb{R}$, na kateri je predpis dobro definiran, torej predpis nam za te argumente da realno število. Če ne povemo nič o domeni, nam **predpis $\boldsymbol{f}$ da funkcijo $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{D_f}, \mathbb{R}, \boldsymbol{f})$.**

Ničle polinomov

- definicija ničle funkcije :
- definicija polinoma :
- Običajna naloga : poišči VSE ničle polinoma (tudi kompleksne ... !?)

<u>Nesmiselno, saj realna funkcija seveda ne more imeti kompleksnih ničel !</u>

Ničle polinomov

To je lep primer, ko bi bilo zanimivo pogledati v zgodovino, tu mislim na številne učbenike, ki so si sledili v zadnjih desetletjih....

Predlog „rešitve“:

Ker v učnem načrtu ni kompleksnih funkcij, nejasnost odpravimo takole: polinomi so realne funkcije realne spremenljivke, pri obravnavi enačbe $p(x) = 0$ pa povemo, da se da izraz na levi strani razcepiti na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje, ki imajo konjugirano kompleksne korene (rešitve), kar je znano že od prej, iz obravnave kvadratne enačbe.

Vektorji

- Definicija vektorja:

Usmerjene daljice ... Ekvivalenčni razred !!!

- Komponente in koordinate vektorja; povezava s fiziko

Vektorji

Definicija vektorja, ki pravi: vektor je usmerjena daljica med točkama A in B **je napačna**.

To se pokaže takoj ko povemo, kdaj sta vektorja enaka. Nerodna je seveda potem tudi definicija nasprotnega vektorja, itd. Vektorji so seveda ekvivalenčni razredi usmerjenih daljic, za relacijo enakost vektorjev. Če to lahko naredimo za racionalna števila, ni razloga, da ne bi korektno definirali tudi pojma vektorja.

Vektorji

Druga nedoslednost je uporaba pojmov koordinate in komponente vektorja. Npr. »**Komponente** krajevnega vektorja točke A **so kar koordinate** točke A«[3, stran 67]

Ampak v fiziki (pogosto celo v zgledu v istem učbeniku) pa silo razstavimo na recimo dve komponenti, ki sta tudi sili! Precej nerazumljivo ...

Vektorji

Sprejemljivo bi bilo v matematiki govoriti o **koordinatah ali komponentah** vektorja, in poudariti, da tu vedno govorimo o komponentah glede na ortonormirano bazo, zato zapis

$$\vec{v} \; = \; v_{\boldsymbol{x}}\,\vec{\imath} \; + \; v_{\boldsymbol{y}}\,\vec{\jmath} + v_{\boldsymbol{z}}\vec{k} \; = \; (\,v_{\boldsymbol{x}}\,, v_{\boldsymbol{y}}\,, v_{\boldsymbol{z}}).$$

<u>S tem smo se izognili težavi, ki nastopi, ko hočemo uporabiti vektorski račun v fiziki.</u> Tam seveda je komponenta sile sila, torej komponente vektorja so vektorji in ne neki koeficienti (torej skalarji)! Za povrh so seveda komponente v fiziki pogosto definirane naravno glede na obravnavani primer, in dobljena baza pogosto ni ortonormirana baza. Standarden primer je klada na klancu.

Nedoločeni integral

Ker želimo poudariti, da je v tipičnem primeru primitivnih funkcij dane funkcije veliko in da tvorijo družino funkcij, ki se razlikujejo za aditivno konstanto, zapišemo, npr.

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \; x^{n+1} \; + C \, ,$$

kjer je C poljubno realno število, in seveda $n \neq -1$.

Dijaka, ki pozabi na »+C« pogosto kaznujemo s kako nedodeljeno točko. <u>Ampak te naše formule so **napačne**, vsaj nekatere od njih !</u>

Nedoločeni integral – primer:

$$\int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-2}\ x^{-2}\ + C$$

pove, da je ima katerakoli primitivna funkcija funkcije $f(x) = x^{-3}$ za neki $C \in \mathbb{R}$ predpis oblike $F(x) =\ -\frac{1}{2}\ x^{-2}\ + C.$ Kaj pa funkcija s prepisom

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^{-2} + 1, & x > 0, \\ -\frac{1}{2}x^{-2} + 2, & x < 0 \end{cases} \quad ?$$

<u>Odvod funkcije h na vsakem od intervalov je enak x^{-3}, našli smo primitivno funkcijo funkcije f, ki ni zgoraj predvidene oblike !</u>

Nedoločeni integral – primer:

Težava je seveda v tem, da se poljubni dve primitivni funkciji razlikujeta za konstanto na vsakem povezanem območju.

Problematični » $+C$« torej lahko pogojno ostane, le zavedati se je treba, da to ni konstanta $C \in \mathbb{R}$, pač pa **odsekoma konstantna funkcija**.

ZAKLJUČEK

Za konec ponovimo, da je avtor na izbrane primere naletel bolj ali manj po naključju, in preveril samo nekatere učbenike in druge vire.

Zato nikakor ne trdimo, da je to seznam najpomembnejših ali najresnejših težav.

Je pa **motivacija**, da se ob osvežitvi programa ali pisanju novega učbenika **vedno znova vprašamo**, ali je mogoče še kaj narediti boljše.

VPRAŠANJA, KOMENTARJI ... ?