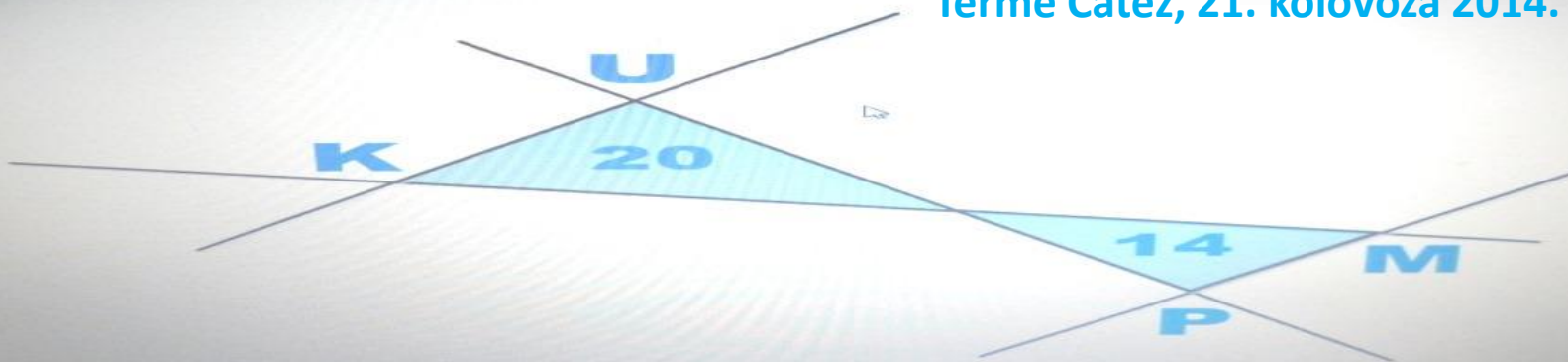


# Učenje temeljeno na čitanju s razumijevanjem



Nives Baranović  
Filozofski fakultet, Split

Terme Čatež, 21. kolovoza 2014.



Zavod Republike Slovenije za šolstvo  
The National Education Institute Slovenia

# Molila bih nekog dobrovoljca da pročita i objasni sljedeće zapise?

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \cdot y < 0) \Rightarrow [(x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0)]$$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = -3x + 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

$$e^{i\pi} = -1$$

# Molila bih nekog dobrovoljca da pročita i objasni sljedeći zapis?

....59. Le7-c5?, g6-g5!!; 60. f4:g5, d5-d4+; ....

Dio zapisa odigranih poteza u jednoj partiji šaha između Kotova (bjele figure) i Botvinika (crne figure)



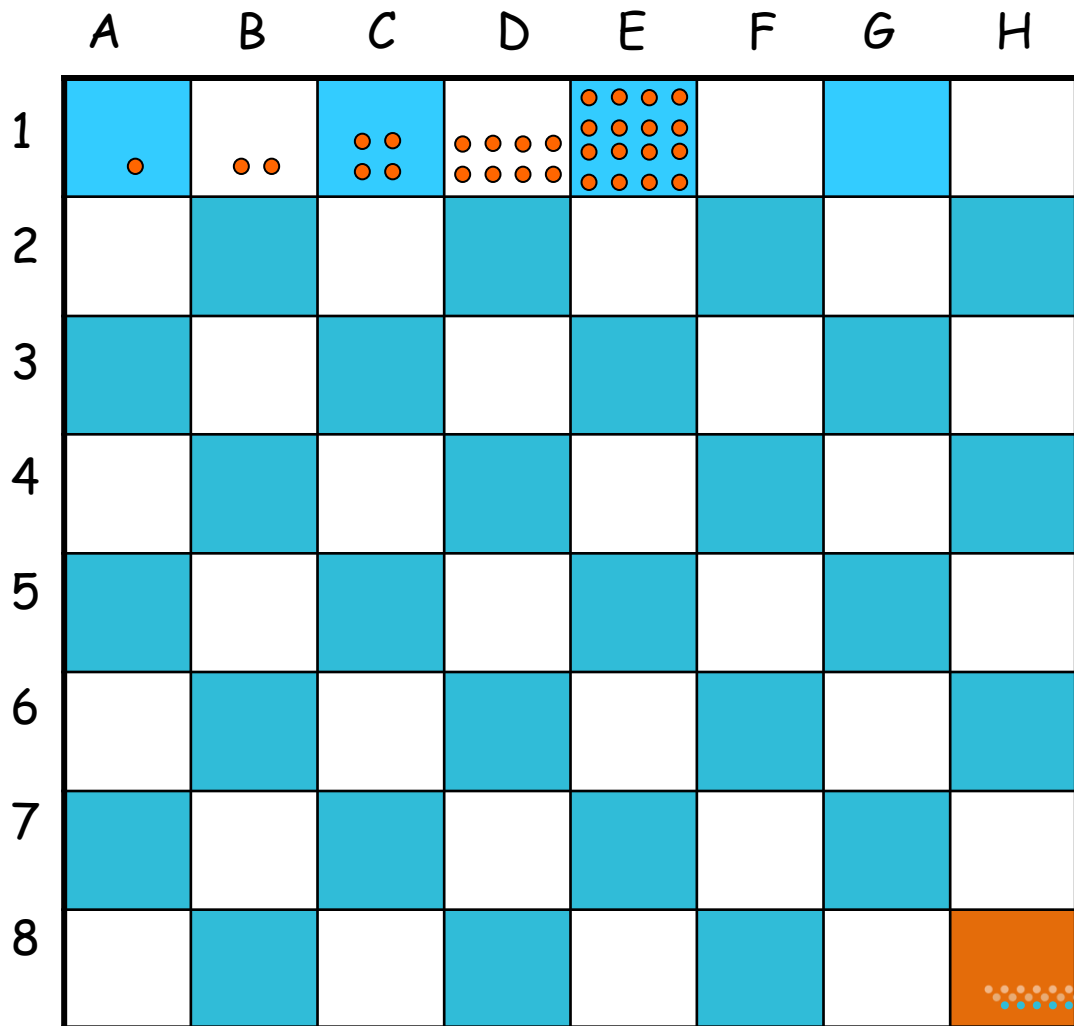
Zavod  
Republike  
Slovenije  
za šolstvo



# Šah i matematika....

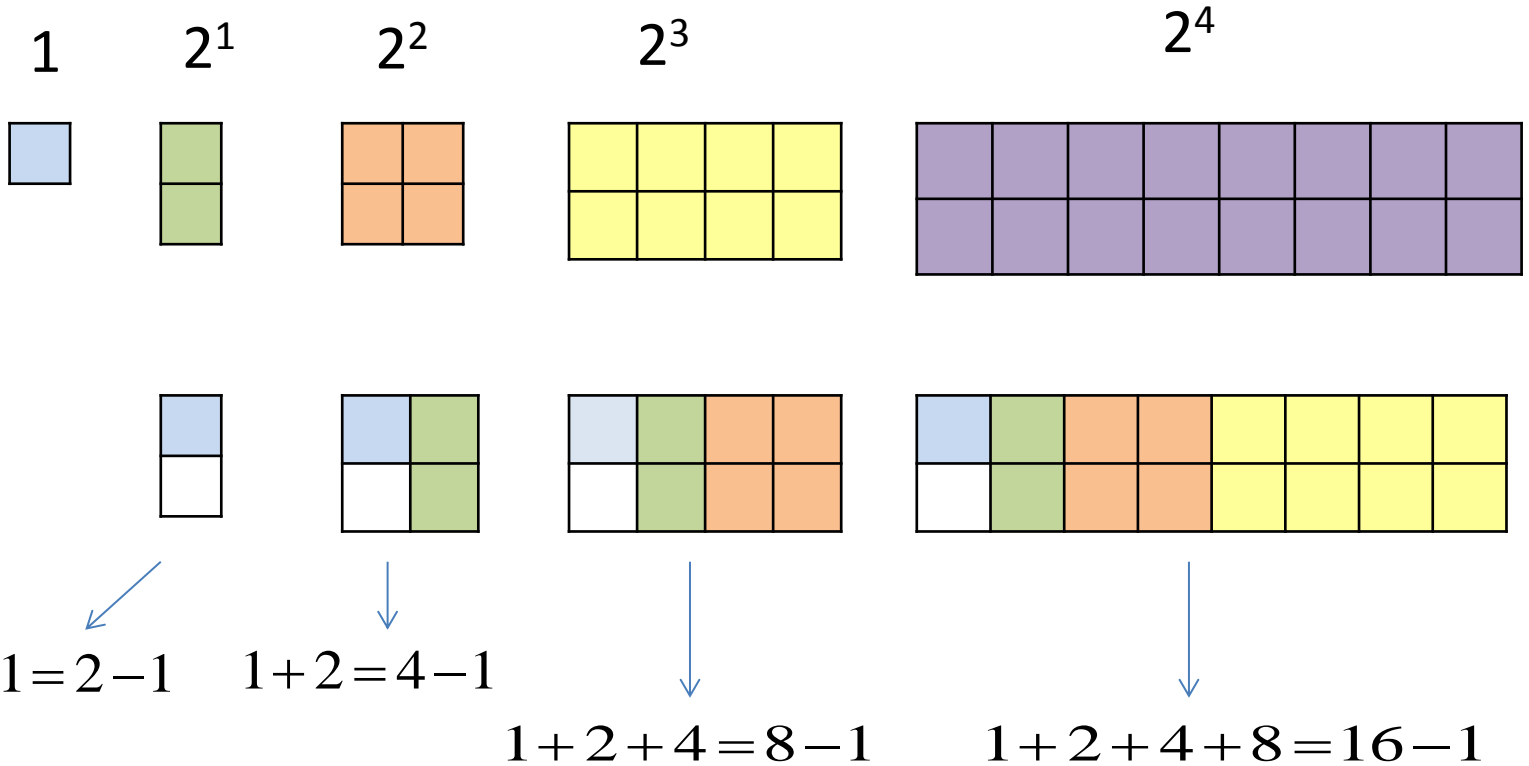


# Osjećaj za količinu



$$2^{63}$$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} =$$



$$\Rightarrow 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$



Kako bi odredili koliko je  $2^{64} - 1$  zrna pšenice?

18 446 744 073 709 551 615

18 kvintiliona  
446 kvadriliona  
744 triliona  
73 biliona  
709 miliona  
551 tisuća  
i 615 zrna pšenice.

Kojih dimenzija bi trebao biti silos da u njega stavimo  
svu tu pšenicu?

# Ako nastavimo proces...

...dolazimo do geometrijskog reda koji divergira.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = +\infty$$

No, zbroj beskonačno mnogo članova nekog geometrijskog niza može biti i konačan:

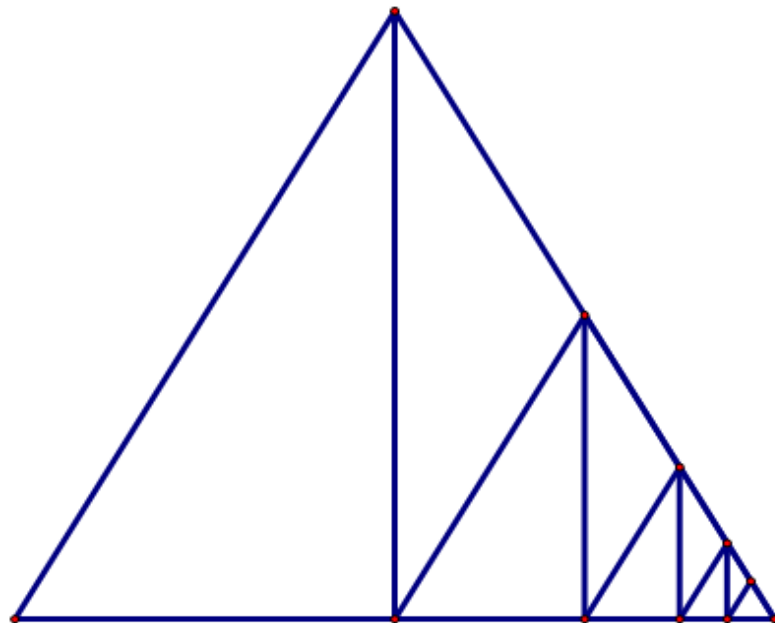
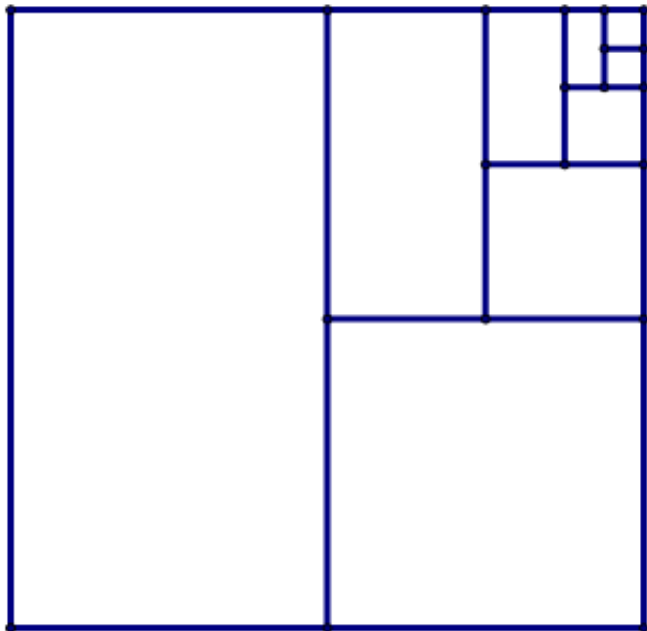
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

**Kako tu činjenicu približiti učenicima?**

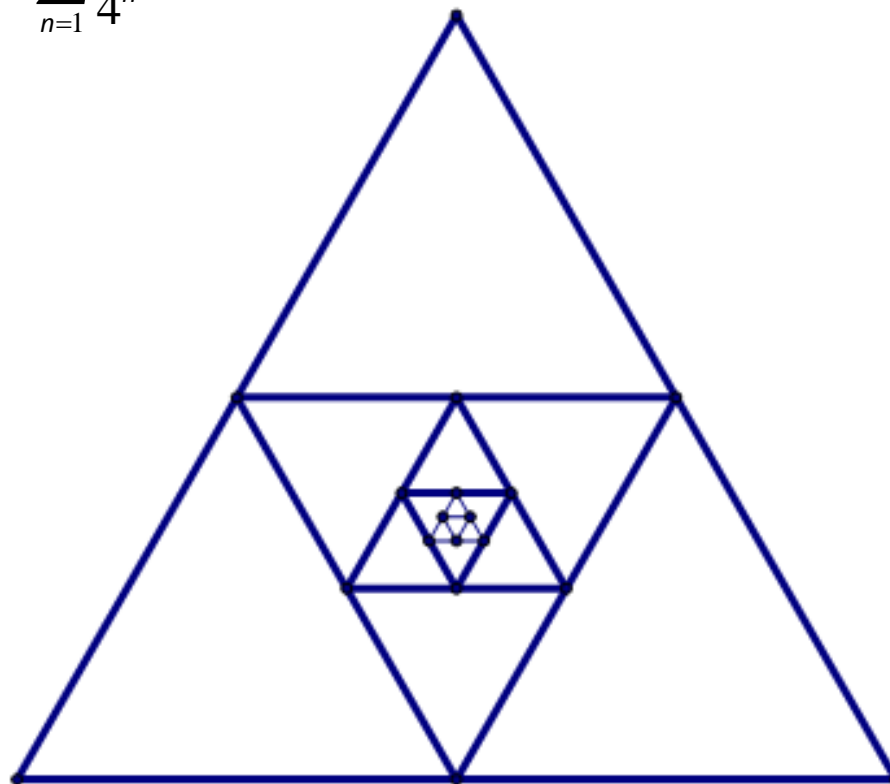


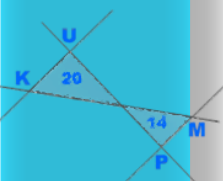
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$



$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \dots + \frac{3}{4^n} + \dots = 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^n} = 1$$

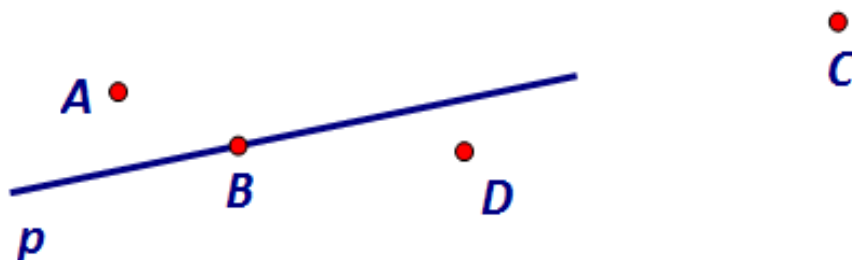




**Zor je nužan, ali ne i dovoljan...**

Kako bi opisali odnos pravca  $p$  i preostalih  
elemenata na slici?

Kako bi taj odnos simbolički zapisali?



$$p \cap k = A$$

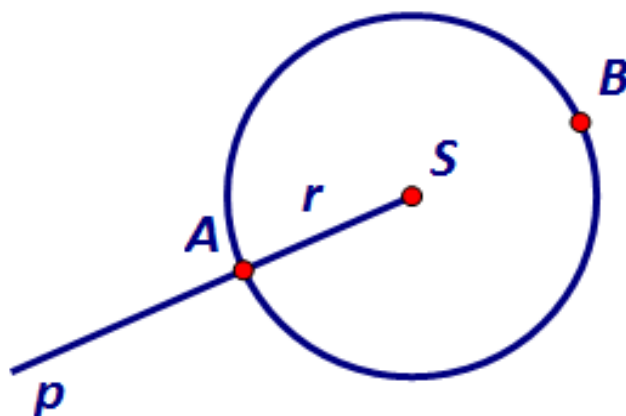
$$p \cap k = A, B$$

$$p \cap k = \{A, B\}$$

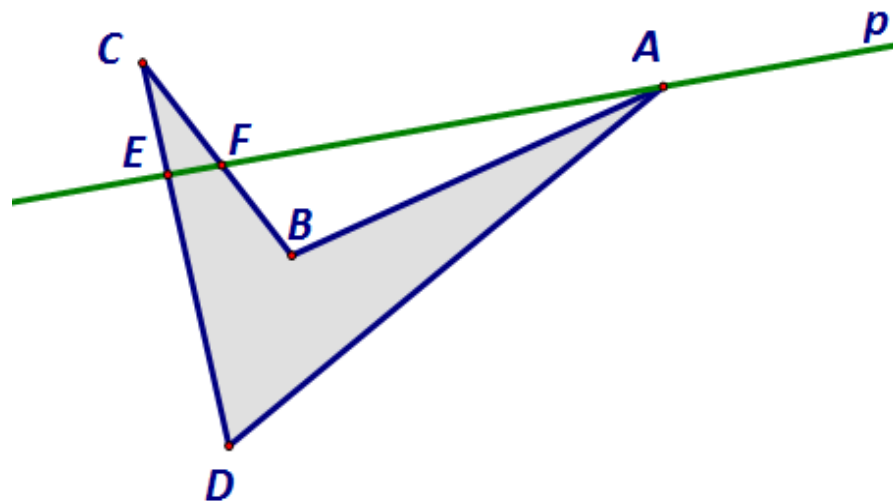
$$p \cap k = \{A, B, S\}$$

$$p \cap k = \{\overline{AB}\}$$

$$p \cap k = \overline{AB}$$

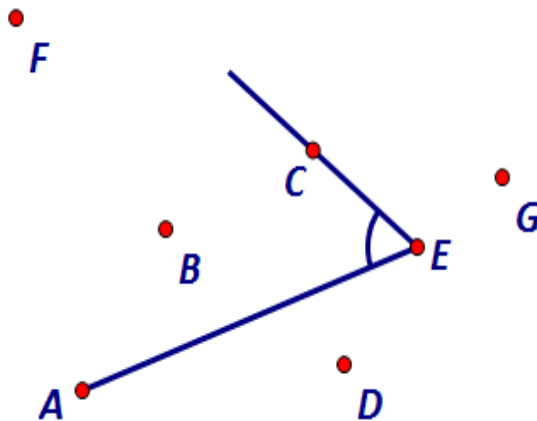


# Što sve može biti presjek pravca $p$ i nekonveksnog četverokuta $ABCD$ ?

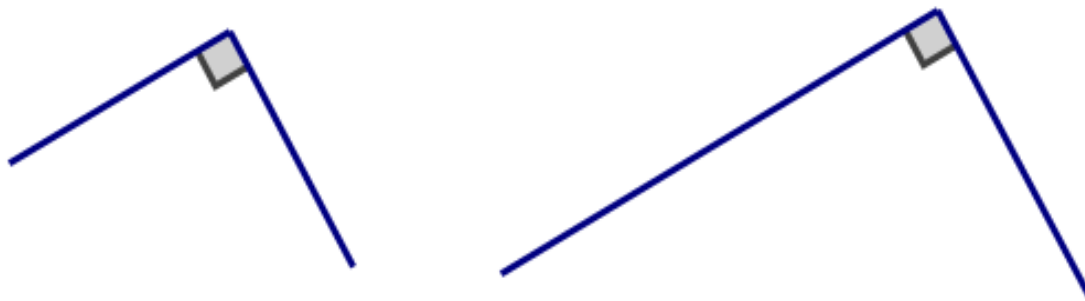


Svoj odgovor prikazati grafički, opisno i simbolički.

Koje točke pripadaju, a koje ne pripadaju  
kutu?



Koji od dvaju prikazanih kutova je veći?



## Jednakokrani trokut...

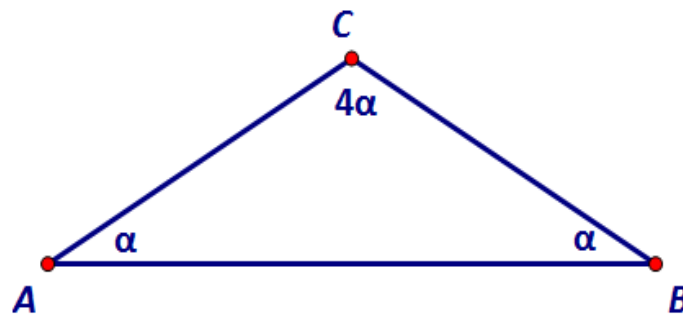
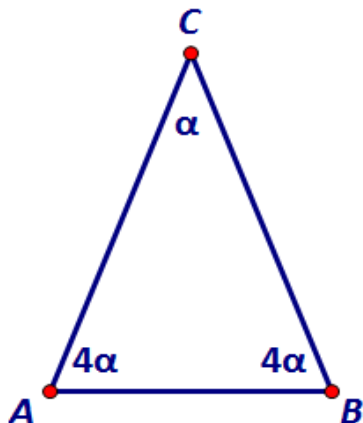
*Zadatak: Jedan kut jednakokračnog trokuta jednak je četverostrukom kutu jednog od preostala dva. Odredite veličine kutova tog trokuta.*

Rješenje: Veličine kutova trokuta su:

$$80^\circ, 80^\circ \text{ i } 20^\circ$$

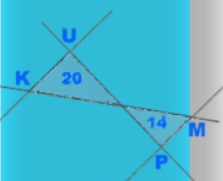
ili

$$30^\circ, 30^\circ \text{ i } 120^\circ$$





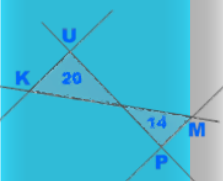
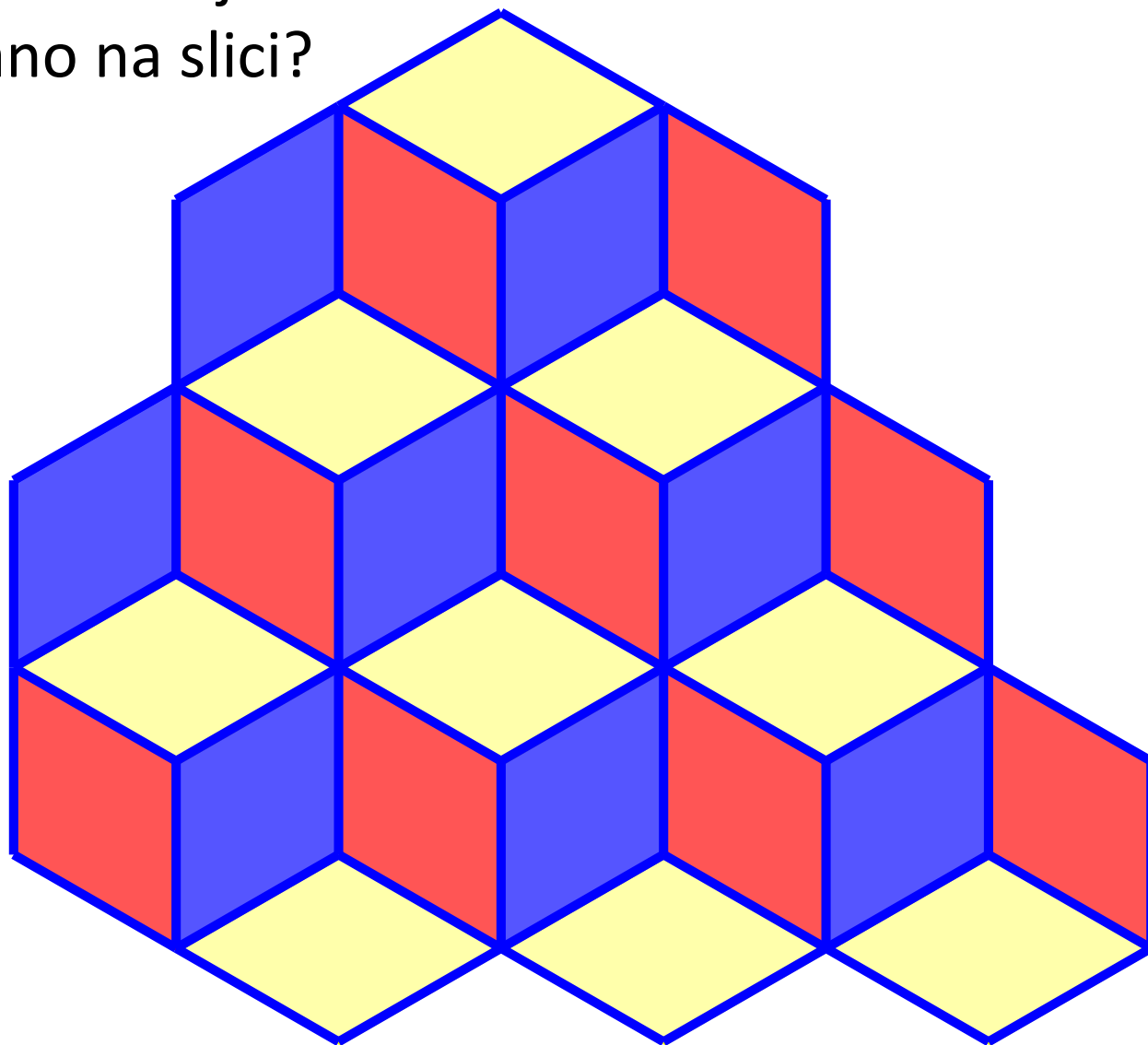
Zavod  
Republike  
Slovenije  
za okolje



# Mala zrnca oprostornom zoru...



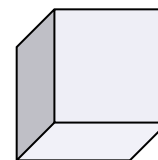
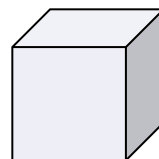
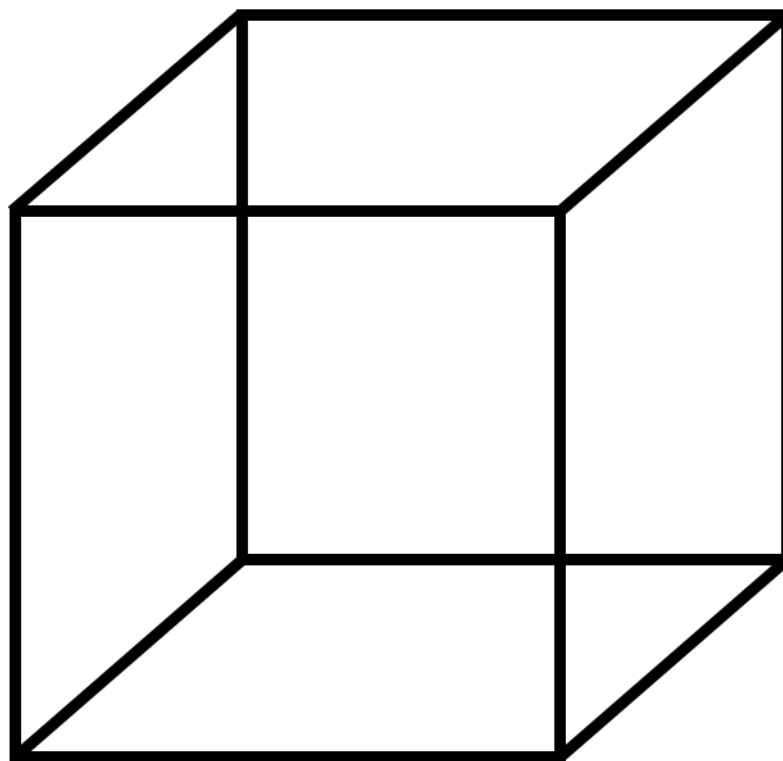
Koliko kocaka je  
nacrtano na slici?





Je li baza ovog  
tijela  
paralelogram ili  
kvadrat?

Je li tijelo stoji na  
podu ili je  
obješeno o  
strop?

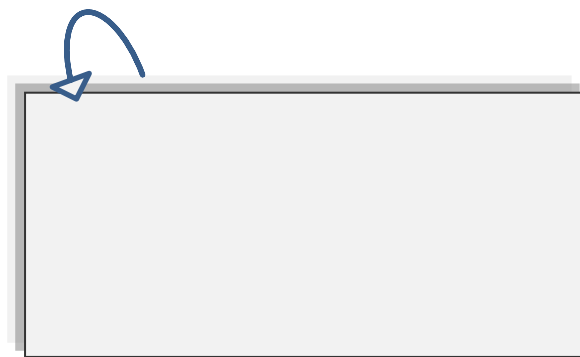
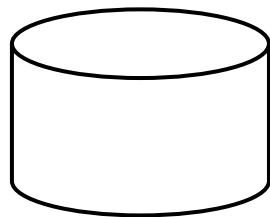


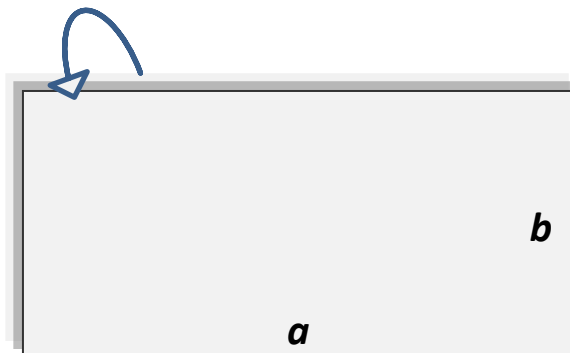
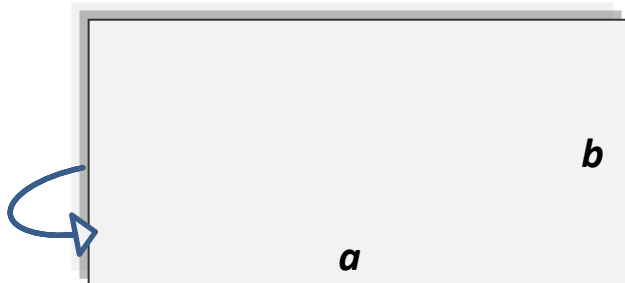
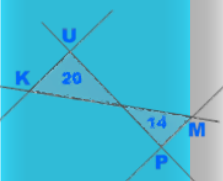
*Neckerova kocka*

*Crtanje*

## Rotacijska tijela...

Uzmimo dva lista papira jednakih dimenzija 40cm x 20cm te od njih oblikujmo šuplji valjak tako da jednom visina bude kraća stranica lista, a drugom da visina bude dulja stranica lista. Hoće li dva valjka tih dimenzija zauzimati jednaki prostor ili ne? Argumentirajte svoj odgovor.





$$2r\pi = a \Rightarrow r_1 = \frac{a}{2\pi}$$

$$v_1 = b$$

$$V_1 = \frac{a^2 b}{4\pi}$$

$$2r\pi = b \Rightarrow r_2 = \frac{b}{2\pi}$$

$$v_2 = a$$

$$V_2 = \frac{ab^2}{4\pi}$$

$$V_1 : V_2 = \frac{a^2 b}{4\pi} : \frac{ab^2}{4\pi} = a : b$$

Volumeni su jednaki kada je  $a = b$ .

[Animacija u programu dinamičke geometrije.](#)

## Valjak maksimalnog volumena

Kada će valjak imati maksimalni volumen, ako je zbroj duljina radijusa i visine tog valjka konstanta i iznosi 6.

$$r + v = 6 \Rightarrow v = 6 - r$$

$$V = B \cdot v, \quad V = r^2 \pi \cdot (6 - r)$$

$$V(r) = 6r^2 \pi - r^3 \pi$$

$$V'(r) = \pi \cdot (12r - 3r^2)$$

$$V''(r) = \pi \cdot (12 - 6r)$$

Stacionarne točke:  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 4$

$$V''(0) = 12\pi > 0, \quad V''(4) = -24\pi < 0$$

Funkcija ima maksimalnu vrijednost kada je  $r = 4$ . Pri tome je  $v = 2$ , a volumen iznosi:  $V = 32\pi \approx 100.48$

[Animacija u programu dinamičke geometrije.](#)

# Jednadžbe...

Primjer: Za koje vrijednosti realnog broja  $a$  jednadžba:

$$|x + 2| = ax + 1$$

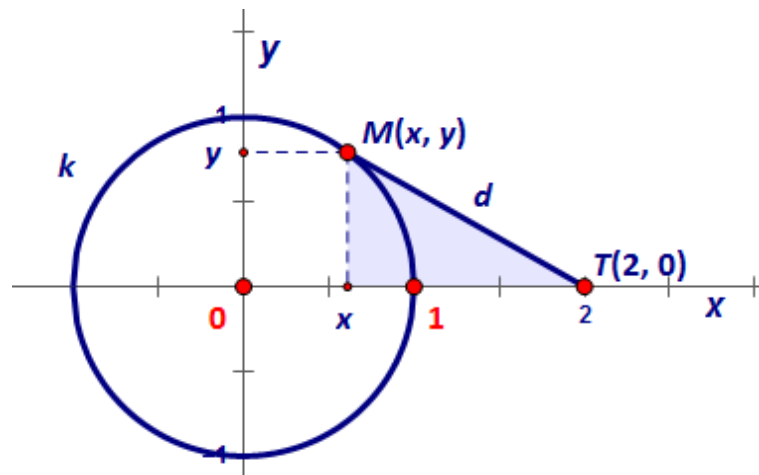
ima jedinstveno rješenje?

**Proceduralnim rješavanjem** u razmatranju dvaju slučajeva, dobiva se da jednadžba ima jedinstveno rješenje za:  $|a| > 1$ ,  $a = -1$  i  $a = 0.5$ .

Do rješenja na [drugi način](#).

## Otkrijte grešku...

Koja točka kružnice  $x^2 + y^2 = 1$  je najbliža točki  $T(2, 0)$ .



**Rješenje:** Na kružnici  $k$  ne postoji točka koja je najbliža točki  $T$ .

**Objašnjenje:** Neka je  $M(x, y)$  proizvoljna točka kružnice  $k$ .

Udaljenost između točaka  $M$  i  $T$  označimo sa  $d$ . Prema Pitagorinu poučku, kvadrat te udaljenosti je:

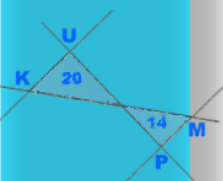
$$d^2 = (2-x)^2 + y^2, \quad d^2 = (2-x)^2 + (1-x^2)$$

$$d^2 = 5 - 4x$$

Udaljenost  $d$  je minimalna kada je  $d^2$  minimalan. Izraz  $d^2$  predstavlja linearnu funkciju, a kako linearna funkcija nema ni minimalnu ni maksimalnu vrijednost, zaključujemo da ne postoji minimalna vrijednost  $d$ , tj. na kružnici ne postoji točka  $M$  koja je od točke  $T$  minimalno udaljena.



Zavod  
Republike  
Slovenije  
za solstvo



Za kraj...





## Rasplet priče o caru, s početka

Da je Car bio spretan ipak se mogao izvući da je tražio od Seta da sam sebi odbroji zrna koja zaslužuje.

Jer, kada bi u svakoj sekundi odbrojio jedno zrno tada bi mu za **86 400 zrna** trebao jedan **cijeli dan i noć**. U **80 godina** bi na takav način odbrojio **6 912 000 zrna** što stane na manje od pola šahovske ploče.

To znači da za života ne bi mogao sve odbrojiti.



**Učenjem matematike neče svi učenici postati vrsni matematičari, ali bi svi nakon 12 godina matematičkog obrazovanja trebali biti barem matematički pismeni.**

**No, jesu li?**